

**Metode *Nonlinear Least Square* (NLS) untuk Estimasi Parameter Model  
*Wavelet Radial Basis Neural Network* (WRBNN)**

**Rukun Santoso<sup>1</sup> dan Sudarno Sudarno<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Departemen Statistika FSM Undip

e-mail: [rukunsantoso@undip.ac.id](mailto:rukunsantoso@undip.ac.id)

DOI: 10.14710/medstat.10.1.49-59

**Article Info:**

Received: 31 Mei 2017

Accepted: 14 Juni 2017

Available Online: 14 Agustus 2017

**Keywords:**

*Wavelet, Radial Basis,  
Heteroscedastic Model, Neural  
Network Model.*

**Abstract:** The use of wavelet radial basis model for forecasting nonlinear time series is introduced in this paper. The model is generated by artificial neural network approximation under restriction that the activation function on the hidden layers is radial basis. The current model is developed from the multiresolution autoregressives (MAR) model, with addition of radial basis function in the hidden layers. The power of model is compared to the other nonlinear model existed before, such as MAR model and Generalized Autoregressives Conditional Heteroscedastic (GARCH) model. The simulation data which be generated from GARCH process is applied to support the aim of research. The sufficiency of model is measured by sum squared of error (SSE). The computation results show that the proposed model has a power as good as GARCH model to carry on the heteroscedastic process.

## 1. PENDAHULUAN

Aktivitas ekonomi seperti pasar modal, pasar komoditas, dan kurs mata uang memiliki ukuran kuantitas yang dapat dinyatakan sebagai suatu variabel random. Contoh dari kuantitas-kuantitas dimaksud adalah keuntungan saham, index harga saham, jumlah produk komoditas, jumlah permintaan komoditas, harga komoditas, nilai tukar antar mata uang, dan lain-lain. Jika kuantitas tersebut diukur menurut periode waktu tertentu maka hasil pengukurannya akan membentuk data runtun waktu. Metode analisis runtun waktu terus berkembang sejak Box dan Jenkins (1976) mengawali pembahasannya dalam *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Metode Box-Jenkins dapat bekerja dengan baik jika data sampel diambil dari proses yang stasioner atau dapat dibawa ke bentuk stasioner (Wei, 1994). Model yang terbentuk termasuk dalam kelas model linier.

Pada perkembangannya ditemukan fakta bahwa data ekonomi pada umumnya memiliki sifat *nonlinear* serta varian yang berubah dari waktu ke waktu (heteroskedastik). Dalam kondisi ini metode Box-Jenkins mungkin memberikan jawaban yang kurang memuaskan. Beberapa metode untuk mengatasi masalah nonlinieritas dalam data

antara lain model TAR (*Threshold Autoregressives*), model SETAR (*self-exciting TAR*), model STAR (*smooth transition autoregressives*) dan lain-lain. Model TAR dan SETAR antara lain dibahas oleh Tong (1990) sedangkan model STAR diusulkan oleh Terasvirta (1994). Engel (1982) mengusulkan model runtun waktu yang dapat mengakomodasi masalah heteroskedastik dalam data. Model tersebut diberi nama model *Autoregressives Conditional Heteroskedasticity* (ARCH). Generalisasi model ARCH diusulkan oleh Bolerslev (1986) dan diberi nama model *Generalized ARCH* (GARCH). Secara umum model ARCH dan GARCH memiliki dua bagian model yaitu model mean dan model varian. Sebagai model parametrik, model ARCH dan GARCH mengasumsikan bahwa sesatan model berdistribusi normal dengan varian yang berubah bergantung waktu.

Model non-parametrik terkini sebagai alternatif lain di antaranya model *Neural Network* (NN) atau Jaringan Syaraf Tiruan (JST) dapat ditemukan pada Haykin (1999) dan Samarasinghe (2006), model *wavelet* (Murtagh, et al. 2004; Rukun, dkk. 2011), model fuzzy dan model gabungan (hibrid) seperti model *wavelet-jaringan syaraf tiruan* (Renaud, et al. 2003; Starck, et al. 2007), dan model *wavelet-fuzzy* (Popoola, 2007). Metode non-parametrik tidak bergantung pada asumsi distribusi random variabel tertentu tetapi bekerja berdasarkan data, sehingga analisisnya tidak terlalu rumit. Kelemahan metode non-parametrik pada umumnya adalah melibatkan perhitungan numerik yang banyak. Dengan pesatnya perkembangan teknologi komputer hal ini tidak menjadi kendala yang berarti. Uji keberadaan sifat *nonlinear* dalam data merupakan bagian awal sebelum membangun model *nonlinear*. Uji dimaksud antara lain dibahas oleh Terasvirta, Lin dan Granger (1993) yang mengusulkan uji nonlinearitas dengan pendekatan model jaringan syaraf tiruan. Metode pendekatan JST juga diusulkan oleh Lee, White dan Granger (1993) dengan nilai awal bobot random.

Tulisan ini mengusulkan model baru yang diberi nama model *Wavelet Radial Basis Neural Network* (WRBNN). *Wavelet* telah dikenal sebagai *tools* untuk mengurangi *noise* dalam data (Ogden, 1997). *Radial basis* telah dikenal sebagai fungsi pembangkit pendekatan *nonlinear* yang dapat mengakomodasi kondisi lokal (Orr, 1996). Jaringan syaraf tiruan telah banyak digunakan untuk melakukan klasifikasi dan mencari nilai pendekatan fungsi. Keunggulan metode ini adalah kemampuannya untuk melakukan perbaikan model sehingga dapat dicapai keadaan optimal (Samarasinghe, 2006). Model WRBNN sebagai interaksi *wavelet*, *radial basis* dan jaringan syaraf tiruan diharapkan membentuk model hibrida yang lebih baik. Perangkat lunak komputer yang memadai juga diperlukan dalam penelitian ini. Hal ini didasarkan atas kebutuhan perhitungan dan analisis data yang khas, rumit dan banyak. Salah satu perangkat lunak yang memadai adalah paket program R (R Core Team, 2016) dan didukung modul tambahan fGarch (Wuertz dan Chalabi, 2016) dan wavelets (Aldrich, 2009).

## 2. TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1. Model Runtun Waktu Nonlinear

Box dan Jenkins (1976) adalah pelopor yang memodelkan runtun waktu secara matematis, dengan nama model *Autoregressives Moving Average* (ARMA). Metode Box-Jenkins dapat bekerja dengan baik pada proses yang stasioner. Model yang terbentuk termasuk dalam kelompok model linear. Tahapan kerja metode ini meliputi tahap persiapan data, pemilihan model, pendugaan parameter, pemeriksaan model dan

peramalan. Persiapan data termasuk diferensi dan transformasi dilakukan agar stasioneritas proses terpenuhi. Model umum ARMA dapat dilihat pada Persamaan (1).

$$Y_t = \mu + \sum_{i=1}^p \gamma_i Y_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \epsilon_{t-j} + \epsilon_t, \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \quad (1)$$

Fakta membuktikan bahwa ketergantungan runtun waktu terhadap informasi historis tidak selalu linear. Hal ini menjadikan inspirasi untuk mengkaji model runtun waktu *nonlinear*. Salah satu bentuk hubungan *nonlinear* adalah adanya sifat heteroskedastik, yaitu varian proses yang berubah bergantung waktu. Model heteroskedastik yang pertama diperkenalkan oleh Engle (1982) yang diberi nama model *Autoregressives Conditional Heteroscedasticity* (ARCH). Ide dasarnya adalah mengasumsikan bahwa suku sesatan  $\epsilon_t$  dari Persamaan (1) berpola *nonlinear* terhadap sesatan yang lampau, seperti dimodelkan pada Persamaan (2) dan (3).

$$\epsilon_t = \sigma_t v_t, v_t \sim N(0, \sigma^2), \quad (2)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{k=1}^s \alpha_k \epsilon_{t-k}^2 \quad (3)$$

Bollerslev (1986) mengembangkan model ARCH pada Persamaan (3) menjadi model *Generalized ARCH* (GARCH) seperti pada Persamaan (4).

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{k=1}^s \alpha_k \epsilon_{t-k}^2 + \sum_{l=1}^r \beta_l \sigma_{t-l}^2 \quad (4)$$

Keberadaan sifat heteroskedastik dapat diketahui dengan uji Multiplikator Lagrange (LM test) yang dikemukakan oleh Lee *et al.* (1993). Model *nonlinear* dapat pula berupa ketergantungan terhadap pengamatan terdahulu, seperti dituliskan dalam persamaan (5).

$$Y_t = \mu + \sum_{i=1}^p \omega_i \Phi(Y_{t-i}) + \epsilon_t \quad (5)$$

dengan  $\Phi$  fungsi *nonlinear* seperti fungsi logistik, fungsi eksponensial, fungsi polinomial, dan fungsi *radial basis*. Pembahasan khusus dalam hal  $\Phi$  merupakan fungsi *radial basis* dapat ditemukan pada Orr dan Haykin.

## 2.2. Model Runtun Waktu Berbasis Wavelet

Daubechies (1992) menjelaskan *Wavelet (mother wavelet)* sebagai fungsi gelombang pendek yang dapat membangun basis orthonormal pada ruang  $L_2(\mathbb{R})$ . Setiap jenis *wavelet* memiliki pasangan fungsi skala (*father wavelet*) yang khas. Biasanya *wavelet* disimbolkan dengan  $\psi$  sedangkan fungsi skala disimbolkan dengan  $\phi$ . Untuk membangun basis pada  $L_2(\mathbb{R})$  *wavelet* membentuk keluarga *wavelet* berupa bentuk dilatasi dan translasi seperti yang tertulis pada Persamaan (6)

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{1}{2}} \psi(2^{-j}t - k), \quad \phi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{1}{2}} \phi(2^{-j}t - k) \quad (6)$$

Ide pembentukan basis *wavelet* untuk ruang  $L_2(\mathbb{R})$  terilhami oleh pembentukan basis untuk ruang  $L_2[-\pi, \pi]$  menggunakan fungsi sines dan kosines (Ogden, 1997). Dalam hal ini setiap fungsi dalam  $L_2[-\pi, \pi]$  dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari fungsi sines dan kosines. Bentuk ini dikenal sebagai deret Fourier. Seperti halnya fungsi sines dan cosines, *wavelet* memiliki sifat-sifat yang mendukung sebagai pembangkit basis seperti tertulis pada Persamaan (7).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{j,k}(t) \phi_{j,m}(t) dt = \delta_{k,m},$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,k}(t)\phi_{l,m}(t)dt &= 0, k \neq m, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,k}(t)\psi_{l,m}(t)dt &= \delta_{j,l}\delta_{k,m}\end{aligned}\quad (7)$$

*Wavelet* dan fungsi skala bersama-sama dapat membangun ruang multiresolusi, sehingga setiap fungsi  $f \in L_2(R)$  dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari *wavelet* dan fungsi skala seperti disajikan pada Persamaan (8).

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \phi_{j,k}(t) + \sum_{j \leq J} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (8)$$

Ruang multiresolusi yang memuat Persamaan (8) pada tingkat  $J$  dapat dituliskan dengan Persamaan (9).

$$L_2(R) \supseteq S_J \oplus D_J \oplus D_{J-1} \oplus \dots \oplus D_1 \quad (9)$$

dengan  $\oplus$  menyatakan operasi jumlahan ortogonal dua ruang vektor. Koefisien-koefisien pada persamaan (8) dapat dihitung menggunakan Persamaan (10).

$$c_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi_{j,k}(t)dt, \quad d_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi_{j,k}(t)dt \quad (10)$$

### 2.2.1. Transformasi *Wavelet* Diskrit

Transformasi *wavelet* akan menghasilkan bagian *Smooth* ( $S$ ) dan *Detil* ( $D$ ). Bagian  $S$  menggambarkan pola utama dari data sedangkan bagian  $D$  menggambarkan pola fluktuasinya. Dari suatu *wavelet* terdapat sebanyak berhingga genap nilai-nilai dengan sifat istimewa. Himpunan nilai-nilai dimaksud disebut filter *wavelet*, (Percival dan Walden, 2000) yang biasa dituliskan seperti pada Persamaan (11) dengan sifat seperti dituliskan pada Persamaan (12).

$$\mathbf{h} = [h_0, h_1, \dots, h_{L-1}] \quad (11)$$

yang memenuhi sifat-sifat berikut

$$\sum_{i=0}^{L-1} h_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{L-1} h_i^2 = 1, \quad \sum_{i=0}^{L-1} h_i h_{i+2n} = 0, \quad n \in \mathbb{N} \quad (12)$$

Sebagai pasangan dari filter *wavelet* terdapat filter skala yang dituliskan sebagai

$$\mathbf{g} = [g_0, g_1, \dots, g_{L-1}].$$

Antara  $\mathbf{h}$  dan  $\mathbf{g}$  terdapat hubungan seperti dituliskan pada Persamaan (13).

$$g_l = (-1)^{l+1} h_{L-1-l} \quad (13)$$

Filter yang diulas pada paragraf sebelumnya adalah filter pada tingkat pertama, selanjutnya dinotasikan dengan  $\mathbf{h}^{(1)}$ . Sebelum membangun filter pada tingkatan yang lebih tinggi terlebih dulu dibentuk *up-sampled* dari filter tingkat sebelumnya yaitu dengan cara menyisipkan 0 di antara nilai filter yang tidak sama dengan 0. Jadi *up-sampled* dari (11) adalah seperti tercantum pada Persamaan (14)

$$\mathbf{h}_{up}^{(1)} = [h_0, 0, \dots, h_1, 0, \dots, 0, h_{L-1}] \quad (14)$$

Filter pada tingkat ke-2 dibentuk dengan rumus pada Persamaan (15).

$$\mathbf{h}^{(2)} = \mathbf{h}^{(1)} * \mathbf{g} \quad (15)$$

dengan  $*$  menyatakan operasi konvolusi. Secara umum filter *wavelet* dan filter skala pada tingkat  $j$  dibentuk dengan rumus pada Persamaan (16).

$$\mathbf{h}^{(j)} = \mathbf{h}^{(j-1)} * \mathbf{g} \quad (16)$$

Filter *wavelet* dan filter skala secara bersama-sama dapat membangun matriks

transformasi *wavelet* diskrit. Akibatnya setiap realisasi diskrit dari fungsi dalam  $L_2(R)$  dengan jeda waktu kontan dapat didekomposisi (dipecah) ke dalam bagian halus (S) dan bagian-bagian detil (D). Proses untuk memperoleh S dan D disebut transformasi *wavelet* diskrit (*Discrete Wavelet Transform* = DWT). Misalkan  $Y = \{Y_t\}_{t=1}^N$  suatu runtun waktu dengan  $N > L$  dan  $N = 2^J$  untuk suatu  $J \in Z$ . Transformasi *wavelet* diskrit pada tingkat  $j, j \leq J$  dapat dituliskan seperti pada Persamaan (17).

$$D = H_j Y \tag{17}$$

$H_j$  adalah matriks transformasi tingkat ke- $j$  berukuran  $N \times N$  dan D adalah hasil dekomposisi yang disebut sebagai matriks koefisien dengan ukuran  $N \times 1$ .

Baris pertama samapai dengan baris ke- $\frac{N}{2}$  dari matriks  $H_1$  adalah bentuk periodisasi dua langkah dari  $h^{(j)}$  seperti tersaji dalam matriks pada Persamaan (18)

$$\mathcal{H}_1 = \begin{bmatrix} h_1 & h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & h_{L-1} & h_{L-2} & \dots & h_3 & h_2 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & h_{L-1} & \dots & h_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & h_{L-1} & h_{L-2} & \dots & \dots & h_1 & h_0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Baris ke- $\frac{N}{2} + 1$  sampai baris ke- $N$  pada matriks  $H_1$  merupakan bentuk periodisasi dua langkah dari  $g^{(j)}$  seperti tertera dalam matriks pada persamaan (19).

$$G_1 = \begin{bmatrix} g_1 & g_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & g_{L-1} & g_{L-2} & \dots & g_3 & g_2 \\ g_3 & g_2 & g_1 & g_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & g_{L-1} & \dots & g_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & g_{L-1} & g_{L-2} & \dots & \dots & g_1 & g_0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

Matriks transformasi  $H_2$  dibangun dengan cara mendekomposisikan (memecah) matriks  $G_1$  menjadi matriks  $\mathcal{H}_2$  dan  $G_2$  yang masing-masing merupakan bentuk periodisasi 4 langkah dari filter *wavelet* dan filter skala tingkat 2. Proses dapat dilanjutkan sampai dengan tingkat ke- $j$ , untuk  $\leq J$ . Dalam hal ini  $\mathcal{H}_j$  dan  $G_j$  masing-masing merupakan bentuk periodisasi  $2^j$  langkah dari filter *wavelet* dan filter skala tingkat  $j$ . Lebih lanjut persamaan (17) dapat dituliskan kembali seperti pada Persamaan (20).

$$\begin{aligned} D &= [\mathcal{H}_1 G_1]^T Y = [\mathcal{H}_1 H_2 G_2]^T Y = \dots = [\mathcal{H}_1 \mathcal{H}_2 \dots \mathcal{H}_j G_j]^T Y \\ &= [D_1 S_1]^T = [D_1 D_2 S_2]^T = \dots = [D_1 D_2 \dots D_j S_j]^T \end{aligned} \tag{20}$$

### 2.2.2. Transformasi Wavelet Diskrit Tak Menurun

Transformasi *wavelet* tak menurun (*Undecimated Wavelet Transform* = UDWT) dipandang memiliki keunggulan dibandingkan dengan DWT untuk analisis data runtun waktu (Percival dan Walden, 2000). Keunggulan tersebut antara lain, ukuran sampel tidak harus berbentuk  $2^J$  dan banyaknya koefisien *wavelet* yang didapat pada setiap tingkat dekomposisi adalah tetap yaitu sama banyak dengan ukuran sampelnya. Diberikan notasi untuk filter *wavelet* dan filter skala untuk UDWT berturut-turut adalah  $\tilde{h}$  dan  $\tilde{g}$ . Antara filter DWT dan filter UDWT terdapat hubungan sebagai berikut,

$$\tilde{h} = \frac{h}{\sqrt{2}} \text{ dan } \tilde{g} = \frac{g}{\sqrt{2}}$$

Rumusan UDWT dapat ditulis seperti pada Persamaan (21)

$$\tilde{D} = \tilde{H}_j Y \tag{21}$$

Pada transformasi tingkat  $j$  matriks  $\tilde{H}_j$  berukuran  $(j + 1)N \times N$ . Selanjutnya



dinotasikan  $N$  baris pertama dari  $\tilde{H}_j$  dengan  $\tilde{H}_1$ ,  $N$  baris berikutnya dengan  $\tilde{H}_2$ , proses dilanjutkan sehingga pada tingkat  $j$  diperoleh  $\tilde{H}_j$ , dan  $N$  baris terakhir dinotasikan dengan  $\tilde{G}_j$ . Untuk setiap indeks  $i$ , sub matriks  $\tilde{H}_i$  dan  $\tilde{G}_i$  masing-masing merupakan bentuk periodisasi satu langkah filter *wavelet* dan filter skala tingkat  $i$ . Sebagai contoh sub matriks  $\tilde{H}_1$  dapat disajikan dengan persamaan (22)

$$\tilde{H}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{h}_1 & \tilde{h}_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \tilde{h}_{L-1} & \tilde{h}_{L-2} & \dots & \tilde{h}_3 & \tilde{h}_2 \\ \tilde{h}_3 & \tilde{h}_2 & \tilde{h}_1 & \tilde{h}_0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \tilde{h}_{L-1} & \dots & \tilde{h}_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \tilde{h}_{L-1} & \tilde{h}_{L-2} & \dots & \dots & \tilde{h}_1 & \tilde{h}_0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Dengan cara yang sepadan akan diperoleh  $\tilde{G}_1$  sebagai bentuk periodisasi satu langkah dari filter skala. Pada UDWT tingkat 2, sub matriks  $\tilde{G}_1$  akan terpecah menjadi  $\tilde{H}_2$  dan  $\tilde{G}_2$  yang masing-masing merupakan bentuk periodisasi satu langkah filter *wavelet* dan filter skala tingkat 2. Lebih lanjut cara yang sepadan dengan Persamaan (20) untuk menuliskan proses UDWT adalah seperti tertulis pada Persamaan (23).

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= [\tilde{H}_1 \tilde{G}_1]^T \mathbf{Y} = [\tilde{H}_1 \tilde{H}_2 \tilde{G}_2]^T \mathbf{Y} = \dots = [\tilde{H}_1 \tilde{H}_2 \dots \tilde{H}_j \tilde{G}_j]^T \mathbf{Y} \\ &= [\tilde{D}_1 \tilde{S}_1]^T = [\tilde{D}_1 \tilde{D}_2 \tilde{S}_2]^T = \dots = [\tilde{D}_1 \tilde{D}_2 \dots \tilde{D}_j \tilde{S}_j]^T \end{aligned}$$

### 2.2.3. Model Peramalan Runtun Waktu dengan UDWT

Umumnya peramalan merupakan tujuan utama dari pemodelan. Terdapat banyak cara melakukan peramalan, dari model sederhana (*naive model*) hingga model yang rumit. Tulisan ini terinspirasi penggunaan hasil transformasi *wavelet* diskrit untuk peramalan runtun waktu yang dibahas oleh Murtagh (2004). Pembahasan lain dapat ditemukan dalam Renaud *et al.* (2003), dan Ciancio (2007). Murtagh mengasumsikan peramalan satu langkah ke depan dipengaruhi hasil UDWT data sebelumnya. Model dari Murtagh lazim disebut sebagai model *wavelet*, seperti dinyatakan pada Persamaan (24)

$$Y_{t+1} = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^{A_j} a_{j,k} d_{j,t-2^j(k-1)} + \sum_{k=1}^{A_{J+1}} a_{J+1,k} s_{J,t-2^J(k-1)} + \epsilon_t \quad (24)$$

Tingkat dekomposisi tertinggi dinyatakan dengan  $J$ . Banyaknya koefisien yang dipilih pada tingkat  $j$  dinyatakan dengan  $A_j$ . Sebagai contoh jika diambil  $J = 4$  dan  $A_j = 2$  untuk  $j = 1, 2, 3, 4, 5$  maka Persamaan (24) dinyatakan sebagai Persamaan (25)

$$\begin{aligned} Y_{t+1} &= a_{1,1} d_{1,t} + a_{1,2} d_{1,t-2} + a_{2,1} d_{2,t} + a_{2,2} d_{2,t-4} + \\ &\quad a_{3,1} d_{3,t} + a_{3,2} d_{3,t-8} + a_{4,1} d_{4,t} + a_{4,2} d_{4,t-16} + \\ &\quad a_{5,1} s_{4,t} + a_{5,2} s_{4,t-16} + \epsilon_t \end{aligned} \quad (25)$$

Penduga parameter dari Persamaan (25) dapat dihitung dengan metode kuadrat terkecil, dan jika distribusi  $\epsilon_t$  diketahui maka dapat dihitung dengan metode likelihood maksimum.

## 3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini bertujuan menghasilkan model secara eksploratif dan simulasi. Data yang digunakan dibangkitkan secara random, sebagai realisasi dari runtun waktu univariat *nonlinear* seperti pada Persamaan (37). Langkah-langkah penelitian dapat dijelaskan dengan uraian berikut ini.

### 3.1. Eksplorasi Model *Wavelet Radial Basis Neural Network*

Fungsi aktivasi *radial basis* telah digunakan pada lapisan tersembunyi dari jaringan syaraf tiruan, antara lain telah dibahas oleh Orr (1996), Haykin (1999), dan Samarasinghe (2006). *Input* yang dekat dengan pusat *radial basis* akan menghasilkan nilai fungsi yang besar, dan sebaliknya. Akibatnya fungsi *radial basis* berperan sebagai pemilah input ke dalam kelompok-kelompok yang lebih homogen. Variabel *input*  $X$  pada *radial basis*, biasanya dinyatakan dalam bentuk baku relatif terhadap parameter lokasi  $\mu$  dan parameter skala  $\sigma$  seperti pada Persamaan (26)

$$r = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (26)$$

Fungsi *radial basis* Gaussian dapat dilihat pada Persamaan (27), fungsi *Multiquadric* pada (28), dan Fungsi *Multiquadric invers* pada (29).

$$\Phi(r) = \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \quad (27)$$

$$\Phi(r) = \sqrt{1 + r^2} \quad (28)$$

$$\Phi(r) = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \quad (29)$$

Penggunaan fungsi *radial basis* pada model JST atau NN sebagai aktivasi *nonlinear* antara lain dibahas oleh Orr (1996) dan Haykin (1999). Hal ini memberikan pemikiran untuk mengembangkan model Persamaan (24) menjadi model *Wavelet Radial Basis Neural Network* (WRBNN). Ide dasarnya adalah menggunakan hasil UDWT sebagai variabel *input* serta penggunaan fungsi *nonlinear radial basis* sebagai fungsi aktivasi pada lapis tersembunyi, sebagai antisipasi adanya sifat *nonlinear* pada hasil transformasi *wavelet*. Model yang dihasilkan dapat digunakan untuk menyelidiki adanya sifat *nonlinear* sekaligus untuk peramalan.

Tanpa mengurangi keumuman, akan dibangun model WRBNN dengan input koefisien hasil transformasi *wavelet* tak menurun pada tingkat  $J = 4$  dan  $A_j = 2$  untuk semua level  $j$  (lihat Persamaan (25)). Tahap-tahap pembentukan model WRBNN adalah sebagai berikut,

1. Mengelompokkan  $\{Y_t\}_{t=1}^N$  ke dalam  $q$  cluster dengan pusat  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q$ ,  $q \geq 1$  dan deviasi standar  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q$ . Metode *k-means* dapat digunakan untuk kepentingan tersebut.
2. Melakukan transformasi UDWT terhadap  $\{Y_t\}_{t=1}^N$  (diambil tingkat transformasi 4)
3. Membentuk matrix input  $X$  dari hasil transformasi yang terpilih seperti pada bagian 3.3. Elemen baris ke- $t$  dari  $X$  untuk  $t = 17, 18, \dots, N$  dapat dituliskan sebagai
 
$$X_t = [d_{1,t}, d_{1,t-2}, d_{2,t}, d_{2,t-4}, d_{3,t}, d_{3,t-8}, d_{4,t}, d_{4,t-16}, c_{4,t}, c_{4,t-16}]$$
4. Merancang model *linear*  $XA_0$ , dengan parameter  $A_0^T = [a_1, a_2, \dots, a_{10}]$
5. Merancang model pada *hidden unit*  $XA_i$ , dengan  $A_i^T = [a_{1,i}, a_{2,i}, \dots, a_{10,i}]$ ,  $i = 1, 2, \dots, q$
6. Merancang model penduga pada lapis *output*  $\hat{Y}_{t+1} = X_t \hat{A}_0 + \sum_{i=1}^q \hat{w}_i \Phi_i(r_{t_i})$   
dengan  $r_{t_i} = \frac{X_t \hat{A}_i - \mu_i}{\sigma_i}$

Bentuk rancang bangun model WRBNN dapat ditunjukkan dengan Gambar 1. Secara matematis model populasinya dapat dituliskan selaras dengan hasil langkah ke-6 yaitu

$$Y_{t+1} = X_t A_0 + \sum_{i=1}^q w_i \Phi_i(r_{t_i}) + \epsilon_t \quad (30)$$

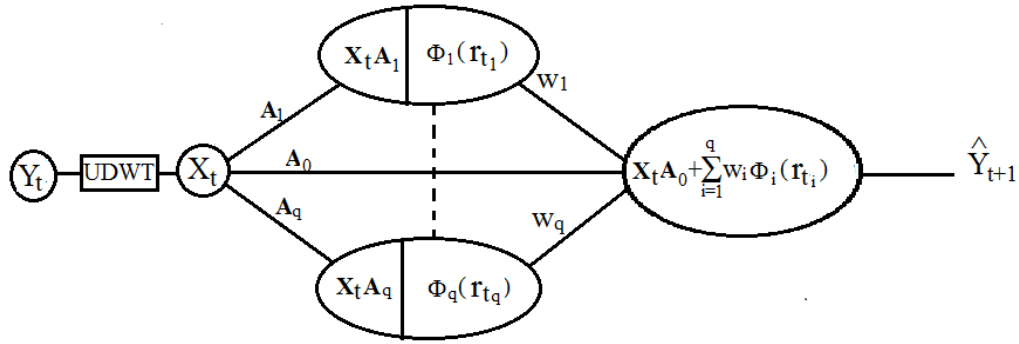
Untuk menyederhanakan pembahasan tanpa mengurangi keumuman masalah, akan ditinjau untuk  $q = 2$  dengan fungsi *radial basis gaussian* sehingga model penaksir yang sesuai dengan Persamaan (30) dengan penyesuaian indeks dapat dituliskan dengan Persamaan (31).

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{t+1} &= \mathbf{X}_t \hat{\mathbf{A}}_0 + \hat{w}_1 \Phi_1(\hat{r}_{t_1}) + \hat{w}_2 \Phi_2(\hat{r}_{t_2}) \\ &= \alpha_t + \beta_t + \gamma_t\end{aligned}\quad (31)$$

Parameter-parameter model diduga sedemikian hingga meminimumkan fungsi objektif pada Persamaan (32) berikut ini,

$$O = \frac{1}{2} \sum_{t=17}^N (Y_{t+1} - \hat{Y}_{t+1})^2 \quad (32)$$

dengan  $\hat{Y}_{t+1}$  dianggap sebagai fungsi *nonlinear* dari  $\theta = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_{10}, \hat{a}_{1_1}, \hat{a}_{2_1}, \dots, \hat{a}_{10_1}, \hat{a}_{1_2}, \hat{a}_{2_2}, \dots, \hat{a}_{10_2}, \hat{w}_1, \hat{w}_2)$  dengan  $\theta$  adalah vektor koefisien pada model penduga.



**Gambar 1.** Rancang Bangun dari Model WRBNN

Agar metode kuadrat terkecil dapat digunakan maka fungsi nonlinear  $\hat{Y}_{t+1}$  pada persamaan (32) diekspansikan ke dalam deret Taylor. Metode ini disebut sebagai metode kuadrat terkecil *nonlinear* atau *Nonlinear Least Square* (NLS). Persamaan (33), (34) dan (35) masing-masing merupakan hasil ekspansi Taylor dari  $\alpha_t, \beta_t$  dan  $\gamma_t$  di sekitar titik awal  $\theta_0$  yang dipotong pada suku derajat satu. Pemotongan dilakukan dengan asumsi suku-suku derajat tinggi pada ekspansi Taylor cukup kecil sehingga dapat diabaikan.

$$\begin{aligned}\alpha_t &= \alpha_0 + \sum_{\hat{a}_j \in A_0} \left. \frac{\partial \alpha_t}{\partial \hat{a}_j} \right|_{\theta_0} (\hat{a}_j - \hat{a}_{j_0}) \\ &= \alpha_0 + \sum_{\hat{a}_j \in A_0} x_j (\hat{a}_j - \hat{a}_{j_0}) \\ &= \alpha_0 + \sum_{j=1}^{10} x_j \delta \hat{a}_j\end{aligned}\quad (33)$$

$$\begin{aligned}\beta_t &= \beta_0 + \sum_{\hat{a}_{j_1} \in A_1} \left. \frac{\partial \beta_t}{\partial \hat{a}_{j_1}} \right|_{\theta_0} (\hat{a}_{j_1} - \hat{a}_{j_{1_0}}) + \left. \frac{\partial \beta_t}{\partial \hat{w}_1} \right|_{\theta_0} (\hat{w}_1 - \hat{w}_{1_0}) \\ &= \beta_0 - \frac{\beta_0 r_{t_{1_0}}}{\sigma_1} \sum_{\hat{a}_{j_1} \in A_1} x_j (\hat{a}_{j_1} - \hat{a}_{j_{1_0}}) + \Phi_1(r_{t_{1_0}}) (\hat{w}_1 - \hat{w}_{1_0}) \\ &= \beta_0 + \frac{\beta_0 r_{t_{1_0}}}{\sigma_1} \sum_{j=1}^{10} x_j \delta \hat{a}_{j_1} + \Phi_1(r_{t_{1_0}}) \delta \hat{w}_1\end{aligned}\quad (34)$$



$$\begin{aligned}
\gamma_t &= \gamma_0 + \sum_{\hat{a}_{j_2} \in A_2} \left. \frac{\partial \gamma_t}{\partial \hat{a}_{j_2}} \right|_{\theta_0} (\hat{a}_{j_2} - \hat{a}_{j_{2_0}}) + \left. \frac{\partial \gamma_t}{\partial \hat{w}_2} \right|_{\theta_0} (\hat{w}_2 - \hat{w}_{2_0}) \\
&= \gamma_0 - \frac{\gamma_0 r_{t_{2_0}}}{\sigma_2} \sum_{\hat{a}_{j_2} \in A_2} x_j (\hat{a}_{j_2} - \hat{a}_{j_{2_0}}) + \Phi_2(r_{t_{2_0}}) (\hat{w}_2 - \hat{w}_{2_0}) \\
&= \gamma_0 + \frac{\gamma_0 r_{t_{2_0}}}{\sigma_2} \sum_{j=1}^{10} x_j \delta_{\hat{a}_{j_2}} + \Phi_2(r_{t_{2_0}}) \delta_{\hat{w}_2}
\end{aligned} \tag{35}$$

Penjumlahan dari Persamaan (33), (34) dan (35) merupakan ekspansi Taylor  $\hat{Y}_{t+1}$  di sekitar  $\theta_0$ . Karena model yang terbentuk linear dalam  $\theta$  maka penaksir yang meminimumkan Persamaan (32) dapat dicari dengan metode LSE. Selanjutnya dilakukan perbaikan terhadap setiap  $\theta_i \in \theta$  menggunakan Persamaan (36)

$$\theta_i = \theta_{i_0} + \delta_{\theta_i} \tag{36}$$

#### 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Data runtun waktu *nonlinear* diperlukan untuk memberikan gambaran penggunaan metode WRBNN. Cara memperoleh data dengan sifat tertentu adalah melalui pembangkitan data random dengan simulasi komputer. Cara simulasi dipilih dalam eksplorasi model WRBNN karena lebih menjamin tersedianya sifat *nonlinear* dalam data. Pada Bagian 2 telah dibahas bahwa runtun waktu heteroskedastik merupakan salah satu perwujudan dari sifat *nonlinear*. Secara simulatif data dimaksud dapat dibangkitkan dengan *library* fGarch. Data hasil pembangkitan dari model ARMA-GARCH akan digunakan untuk membangun model WRBNN. Penentuan model simulatif seperti pada Persamaan (37) tidak memiliki tujuan lain kecuali menyediakan data runtun waktu heteroskedastik.

$$Y_t = 1 + 0,5Y_{t-1} + \sigma_t v_t, \sigma_t^2 = 0,8\sigma_{t-1}^2 + 0,1\epsilon_{t-1}^2, v_t \sim N(0,1) \tag{37}$$

**Tabel 1.** Estimasi Parameter Model ARMA+GARCH

Parameter	Estimasi	Nilai t	Prob.
$\mu$	1	2952.948	0
$\gamma_1$	0.4951	2229.454	0
$\alpha_0$	0	2.040	0.041395
$\alpha_1$	0.1267	3.441	0.000579
$\beta_1$	0.7859	11.704	0

**Table 2.** Estimasi Parameter Model *Wavelet*

Variabel	Koefisien	Nilai t	Prob.
$d_{1,t}$	0.07472	6.195	0
$d_{3,t}$	0.08022	6.569	0
$d_{5,t}$	0.08201	7.342	0
$d_{7,t}$	0.09631	4.201	0
$c_{9,t}$	0.06513	12.025	0
$c_{10,t-16}$	0.06513	3.330	0.000925

Enam ratus titik sampel telah diambil dan hasilnya disajikan pada Lampiran 1. Input model WRBNN adalah hasil UDWT dari data hasil simulasi. Proses UDWT dapat dilakukan menggunakan paket wavelets dalam program R (Aldrich, 2009). Hasil estimasi

parameter model ARMA dan GARCH pada Persamaan (37) dapat disajikan dalam Tabel 1. Hasil estimasi parameter model yang tercantum pada Tabel 1 nampak telah mendekati parameter model pada Persamaan (37). Hasil estimasi parameter model wavelet dengan data simulasi untuk Persamaan (37) disajikan dalam Tabel 2 yang memuat 6 penduga parameter model wavelet yang signifikan dari 10 parameter seperti yang tercantum dalam Persamaan (25). Hasil estimasi parameter model WRBNN dengan pencocokan pada data simulasi Persamaan (37) disajikan dalam Tabel 3 yang memperlihatkan bahwa 6 variabel terpilih pada model wavelet masih dapat dipertahankan sebagai bagian linear dari model WRBNN, meskipun ada penurunan signifikansi pada  $d_{(7,t)}$  dan  $c_{10,t-16}$ . Model yang terbentuk hanya memuat satu fungsi radial basis sebagai bagian nonlinear dari model WRBNN. Kode listing program R untuk mendapatkan nilai penduga koefisien model WRBNN tersaji pada Lampiran 2. Hasil perhitungan jumlah sesatan kuadrat (SSE) dari model GARCH, Wavelet dan WRBNN serta hasil uji normalitas Kolmogorov-Smirnov disajikan pada Tabel 4.

**Table 3.** Estimasi Parameter Model WRBNN

Variabel	Koefisien	Nilai t	Prob.
$d_{1,t}$	0.502293	6.635	0
$d_{3,t}$	0.500346	6.225	0
$d_{5,t}$	0.596003	7.305	0
$d_{7,t}$	0.317993	3.151	0.00171
$c_{9,t}$	0.839897	12.345	0
$c_{10,t-16}$	0.167675	2.494	0.01291
$\Phi_1$	-0.016140	-2.725	0.00662

**Table 4.** SSE dan Uji Normalitas K-S

Model	SSE	N	$\sigma^2$	Prob K-S
GARCH	0.006808593	600	0.000011364	0.6099
Wavelet	0.006785685	583	0.00001165925	0.4264
WRBNN	0.006704714	583	0.00001152013	0.4567

## 5. KESIMPULAN

Hasil estimasi parameter model GARCH, *Wavelet* dan WRBNN menunjukkan bahwa ketiganya memberikan hasil jumlah sesatan kuadrat yang tidak jauh berbeda untuk kasus data heteroskedastik. Penyelidikan terhadap jumlah *node* dan nilai bobot awal yang optimal dalam arsitektur jaringan masih perlu dikembangkan lebih lanjut, untuk mendapatkan perbandingan yang lebih menyeluruh. Disamping itu, sebagai tindak lanjut penyelidikan simulatif perlu dikembangkan penyelidikan aspek teoritik menyangkut sifat matematis dari model *Wavelet* dan WRBNN. Aspek teoritik tersebut menyangkut sifat-sifat baik dari penduga parameter yang terkait dengan model tersebut.

## DAFTAR PUSTAKA

- Aldrich, E., 2009, A package of Functions for Computing Wavelet Filters, Wavelet Transforms and Multiresolution Analyses, <http://www.ealdrich.com/wavelets/>.  
 Bollerslev, T., 1986, Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *J. Of Econometrics*, Vol. 31, pp. 307-27.

- Box, G.E.P. and Jenkins, G.M., 1976, *Time Series Analysis: Forecasting and Control* (San Francisco: Holden-Day).
- Ciancio, A., 2007. Analysis of Time Series with Wavelets, *Int. J. of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, Vol. 5(2), pp. 241-56.
- Daubechies, I., 1992. *Ten Lecture on Wavelets* (Philadelphia: SIAM ).
- Engel, R.F., 1982. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity With Estimates Of The Variance Of United Kingdom Inflation, *J. Econometrica*, Vol. 50, pp. 987-1008.
- Haykin, S., 1999. *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*, Prentice Hall.
- Lee, T. H., White, H. dan Granger, J. W. J., 1993. Testing for Neglected Nonlinearity in Time Series Models: A Comparison of Neural Network Methods and Alternative Tests. *J. of Econometrics*, Vol. 56, pp. 269–290.
- Murtagh, F., Starck, J.L. and Renaud, O., 2004. On Neuro Wavelet Modeling, *Decision Support System*, Vol. 37, pp. 475-90.
- Ogden, R. T., 1997. *Essential wavelets for statistical applications and data analysis*. Birkhauser, Berlin
- Orr, M. J. L., 1996. *Introduction to Radial Basis Function Networks*. Centre for Cognitive Science, University of Edinburgh.
- Percival, D.B. and Walden, A.T., 2000. *Wavelet Methods for Time Series Analysis* (Cambridge: CU Press ).
- Popoola, A. O., 2007. *Fuzzy-wavelet method for time series analysis*. PhD thesis, Surey University Disertasi submitted for the degree of doctor of philosophy in Surey University.
- R core team., 2016. *R: A Language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria URL: <http://www.R-project.org/>.
- Renaud, O., Starck, J. L., dan Murtagh, F., 2003. Prediction Based on a Multiscale Decomposition, *Int. J. of Wavelets Multiresolution and Information Processing*, Vol. 1 (2), pp. 217–232.
- Santoso, R., Subanar, Rosadi, D., and Suhartono, 2011, Heteroscedastic Time Series Model by Wavelet Transform, Proc. of "The 6th SEAMS-UGM Conference 2011"
- Samarasinghe, S., 2006, *Neural Network for Applied Science and Engineering* (New York: Auerbach Pub)
- Starck, J.L., Jalal, F. and Murtagh, F., 2007, The Undecimated Wavelet Decomposition and Its Reconstruction, *IEEE on Image Processing* 16(2), pp 297-309.
- Terasvirta. T., 1996, Power Properties of Linearity Tests for Time Series, *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, Vol. 1(1).
- Terasvirta, T., Lin, C. F., dan Granger, C. W. J., 1993, Power of The Neural Network Linearity Test, *J. of Time Series Analysis*, Vol. 14(2) pp. 209–220.
- Tong, H., 1990, *Nonlinear Time Series: A Dynamic System Approach*, Clarendon Press, Oxford.
- Wei, W.W.S., 1994, *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods* (Canada: Addison-Wesley)
- Wuertz, D. dan Chalabi, Y., 2016, fGarch: Rmetrics Autoregressive Conditional Heteroskedastic Modelling. R package version 3010.82.1. <https://CRAN.R-project.org/package=fGarch>.