Media Statistika

p-ISSN 1979 – 3693 e-ISSN 2477 – 0647
MEDIA STATISTIKA 11(1) 2018: 27-38
http://ejournal.undip.ac.id/index.php/media_statistika

MODEL REGRESI POISSON BIVARIAT DENGAN KOVARIAN KONSTAN

Untung Kurniawan
Badan Pusat Statistik Kabupaten Klaten

e-mail: untungk@bps.go.id

DOI: 10.14710/medstat.11.1.27-38

Article Info:
Received: 21 December 2017
Accepted: 19 August 2018
Available Online: 20 August 2018

Keywords:
Bivariate Poisson Regression, Infant Mortality, Maternal Mortality, Maximum Likelihood Estimation

Abstract: Bivariate Poisson models are appropriate for modeling paired count data exhibiting correlation. This study aims to estimates the parameters and test hypothesis of bivariate Poisson regression on modeling the number of infant mortality and maternal mortality in Central Java 2015. The parameters of the bivariate regression model are estimated by using the maximum likelihood method. Results show that the percentage of births by health personnel, the percentage of pregnant women administered the K4 program, the percentage of pregnant women receiving Fe3 tablets, percentage of exclusively breastfed infants, and percentage of households behaved in a clean and healthy life are significant for the number of infant mortality in Central Java. The variables that have significant effect on maternal mortality are percentage of births by health personnel, percentage of maternal women receiving postpartum health services, and percentage of pregnant women receiving Fe3 tablets.

1. PENDAHULUAN

Regresi adalah suatu metode yang digunakan untuk menganalisis hubungan antara suatu variabel respon dengan satu atau lebih variabel penjelas (Bingham dan Fry, 2010). Pada umumnya, regresi digunakan untuk menganalisis variabel respon yang berjenis kontinu, namun sering juga ditemui variabel respon yang berjenis diskrit (Long, 1997). Variabel respon diskrit dapat berupa data count yaitu data yang nilainya non-negatif dan menyatakan banyaknya kejadian dalam interval waktu, ruang, atau volume tertentu (Winkelmann, 2008). Suatu peristiwa akan mengikuti distribusi poisson jika peristiwa itu jarang sekali terjadi dalam suatu ruang sampel yang besar (Cameron dan Trivedi, 1998). Jumlah kasus kematian bayi dan kematian ibu merupakan salah satu contoh data count yang mengikuti distribusi poisson. Regresi poisson merupakan metode yang sering digunakan untuk menganalisis data count (Agresti, 2007; Cameron dan Trivedi, 1998).

Model regresi data count bivariat digunakan ketika kejadian count yang secara bersama-sama saling bergantung (Gurmu dan Elder, 2007). Peristiwa count berpasangan yang menunjukkan korelasi harus diestimasi secara bersama, dan model regresi count bivariat dirancang untuk menangani kasus tersebut (Chou dan Steenhard, 2011). Model regresi poisson bivariat banyak digunakan untuk data bivariat berkorelasi (Holgate, 1964).

Kematian bayi dan kematian ibu merupakan dua hal yang saling berkaitan karena selama masa kandungan gizi yang diperoleh janin disalurkan dari tubuh ibu melalui plasenta sehingga kondisi ibu selama masa kehamilan akan berpengaruh pada janin dan bayi yang akan dilahirkannya kelak. Peran ibu juga sangat berpengaruh dalam merawat bayi mulai saat ia dilahirkan hingga berumur satu tahun. Dari uraian tersebut perlu adanya suatu penelitian untuk mengkaji faktor-faktor yang mempengaruhi kedua angka kematian tersebut secara bersama-sama.

Tujuan penelitian ini adalah mengkaji estimator parameter model regresi poisson bivariat, mengkaji bentuk statistik uji model regresi poisson bivariat, dan menentukan faktor-faktor yang berpengaruh terhadap jumlah kematian bayi dan jumlah kematian ibu di Propinsi Jawa Tengah Tahun 2015 melalui pendekatan regresi poisson bivariat.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Regresi Poisson Bivariat

Regresi poisson digambarkan dengan adanya hubungan antara variabel respon (Y) yang berdistribusi poisson dan terdapat satu atau lebih variabel prediktor (X) (Agresti, 2007). Regresi Poisson merupakan model regresi yang sering digunakan untuk menganalisis suatu data count. Regresi poisson mengacu pada penggunaan distribusi poisson. Suatu metode yang digunakan untuk memodelkan sepasang count data yang memiliki korelasi (Karlis dan Ntzoufras, 2005) dengan beberapa variabel prediktor adalah regresi poisson bivariat. Model tersebut seperti pada persamaan berikut:

$$(Y_{1i}, Y_{2i}) \sim PB(\lambda_{1i}, \lambda_{2i}, \lambda_0)$$

$$\lambda_{ji} + \lambda_0 = e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_j} \; ; j = 1, 2$$

dengan

$\lambda_{ji} + \lambda_0$ adalah nilai rata-rata jumlah kejadian yang terjadi dalam interval waktu tertentu.

$\mathbf{x}_i$ adalah variabel prediktor yang dinotasikan sebagai berikut: $\mathbf{x}_i = [1 \quad x_{1i} \quad x_{2i} \quad \ldots \quad x_{ki}]^T$

$\boldsymbol{\beta}_j$ adalah parameter regresi poisson yang dinotasikan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{\beta}_j = [\beta_{j0} \quad \beta_{j1} \quad \beta_{j2} \quad \ldots \quad \beta_{jk}]^T$$

dimana k adalah banyaknya variabel prediktor dan $i = 1, 2, \cdots, n$ menunjukkan nomor observasi, observasi digunakan untuk model λ_i dan β_j menunjukkan vektor korespondensi dari koefisien regresi. Terdapat tiga buah model dengan nilai λ_0 yang berbeda, yaitu

a. Model dengan nilai λ_0 adalah suatu konstanta.
b. Model dengan nilai λ_0 merupakan fungsi dari variabel prediktor sehingga persamaannya sebagai berikut :

$$\lambda_0 = \exp(\beta_{00} + \beta_{01} x_1 + \cdots + \beta_{0k} x_k) \,. \tag{2}$$

c. Model dengan nilai λ_0 adalah nol dimana tidak ada kovarian dari kedua buah variabel tersebut.

2.2. Kematian Bayi dan Kematian Ibu

Kematian bayi adalah kematian yang terjadi antara saat setelah bayi lahir sampai bayi belum berusia tepat satu tahun (Dinkes, 2015). Kematian ibu adalah kematian seorang wanita yang terjadi dari suatu penyebab kematian terkait dengan gangguan kehamilan atau penanganannya (tidak termasuk kecelakaan atau kasus insedentil) selama kehamilan, melahirkan dan dalam masa nifas (42 hari setelah melahirkan) tanpa memperhitungkan lama kehamilan (Dinkes, 2015).

3. METODE PENELITIAN

3.1. Sumber Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder yang berasal dari Data Profil Dinas Kesehatan Propinsi Jawa Tengah Tahun 2015.

3.2. Variabel Penelitian

Variabel respon pada penelitian ini adalah jumlah kematian bayi (Y_1) dan jumlah kematian ibu (Y_2) tahun 2015 tiap kabupaten di Provinsi Jawa Tengah. Variabel prediktor pada penelitian ini adalah Persentase persalinan oleh tenaga kesehatan (X_1), Persentase ibu bersalin mendapatkan pelayanan kesehatan nifas (X_2), Persentase ibu hamil melaksanakan program K4 (K4 adalah jumlah ibu hamil yang telah memperoleh pelayanan antenatal sesuai standar paling sedikit 4 kali sesuai jadwal yang telah dianjurkan, dibandingkan dengan jumlah sasaran ibu hamil di satu wilayah kerja pada kurun waktu satu tahun (X_3), Persentase ibu hamil yang mendapatkan tablet Fe3 (X_4), Persentase penanganan komplikasi kebidanan (X_5), Persentase penanganan komplikasi neonatal (X_6), Persentase bayi yang diberi ASI eksklusif (X_7), Persentase rumah tangga berperilaku hidup bersih dan sehat (X_8).

3.3. Metode Analisis

Langkah-langkah dalam analisis data untuk setiap tujuan penelitian adalah sebagai berikut :

1. Langkah-langkah untuk menentukan estimasi parameter pada model regresi poisson bivariat adalah sebagai berikut :
   1) Membentuk fungsi *likelihood* dari model poisson bivariat dengan λ_0 konstan, dengan persamaan sebagai berikut:
   $$L(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_0)=\prod_{i=1}^{n}\left(e^{-(\lambda_0+\lambda_{1i}+\lambda_{2i})}\sum_{k=0}^{s}\frac{\lambda_{1i}^{y_{1i}-k}\,\lambda_{2i}^{y_{2i}-k}\,\lambda_0^{k}}{(y_{1i}-k)!(y_{2i}-k)!(k)!}\right),\quad s=\min(y_1,y_2)$$
   2) Melakukan transformasi ke dalam bentuk persamaan $\lambda_{ji}+\lambda_0=e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_j}$ terhadap fungsi *likelihood*.
   $$L(\lambda_0,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=\prod_{i=1}^{n}\left(\exp(-\lambda_0)-\exp\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}-\lambda_0\right)-\exp\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-\lambda_0\right)\right)W_i$$
   dengan
   $$W_i=\sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})}\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}-\lambda_0\right)^{y_{1i}-k}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-\lambda_0\right)^{y_{2i}-k}}{(y_{1i}-k)!\,(y_{2i}-k)!}\cdot\frac{(\lambda_0)^k}{k!}$$
   dengan nilai j =1, 2; i = 1, 2, …, 35; dan k = 1, 2, …, 8

3) Menetapkan fungsi ln *likelihood* $Q = \ln L(\lambda_0, \boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{\beta_2})$

4) Mencari turunan parsial pertama dari fungsi ln *likelihood*

$$\mathbf{g}^T(\boldsymbol{\theta}) = \left(\left(\frac{\partial Q}{\partial \lambda_0} \right)^T, \left(\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} \right)^T, \left(\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} \right)^T \right)^T$$

5) Mencari turunan parsial kedua dari fungsi ln *likelihood*

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Q}{\partial {\lambda_0}^2} & \frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_0 \partial \boldsymbol{\beta}_1} & \frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_0 \partial \boldsymbol{\beta}_2} \\ & \frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} & \frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_2} \\ \text{simetris} & & \frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \end{bmatrix}$$

6) Mendapatkan nilai estimasi parameter dengan iterasi *Newton-Raphson*.

2. Langkah-langkah untuk menentukan statistik uji pada model poisson bivariat adalah sebagai berikut :

Pengujian hipotesis secara serentak :

1) Membentuk hipotesis untuk menguji model regresi poisson bivariat:

$H_0 : \beta_{j1} = \beta_{j2} = ... = \beta_{j8} = 0$

H_1 : paling sedikit ada satu $\beta_{jk} \neq 0;\ j = 1, 2;\ k = 1, 2, ..., 8$

2) Menentukan himpunan parameter-parameter di bawah H_0 (ω)
3) Membuat fungsi *likelihood* di bawah H_0 $L(\omega)$
4) Menentukan himpunan parameter-parameter di bawah populasi (Ω)
5) Membuat fungsi *likelihood* di bawah populasi $L(\Omega)$
6) Menentukan penaksir parameter dengan metode MLE dan diperoleh $(\hat{\omega})$ dan $(\hat{\Omega})$
7) Menentukan statistik uji dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT)
8) Menentukan daerah penolakan H_0

Pengujian hipotesis secara parsial :

1) Hipotesis untuk menguji signifikansi parameter β

H_0

$H_0 : \beta_{jk} = 0$

$H_1 : \beta_{jk} \neq 0;\ j = 1, 2\ ;\ k = 1, 2, ..., 8$

2) Menentukan statistik uji.
3) Menentukan daerah penolakan H_0

3. Langkah-langkah untuk menentukan faktor-faktor yang berpengaruh terhadap kematian bayi dan kematian ibu di Provinsi Jawa Tengah dengan pendekatan model regresi poisson bivariat adalah sebagai berikut :

1) Melakukan estimasi parameter model regresi poisson bivariat dengan menggunakan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) di mana nilai λ_0 adalah konstanta.
2) Melakukan pengujian hipotesis untuk regresi poisson bivariat.
3) Melakukan interpretasi model yang didapatkan.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Estimasi Parameter Regresi Poisson Bivariat dengan Kovarian Konstan

Metode estimasi yang digunakan dalam regresi poisson bivariat adalah *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dengan fungsi *likelihood*nya sebagai berikut (Jung dan Winkelmann, 1993) :

$$L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_0) = \prod_{i=1}^{n} \left(e^{-(\lambda_0 + \lambda_{1i} + \lambda_{2i})} \sum_{k=0}^{s} \frac{\lambda_{1i}^{y_{1i}-k} \lambda_{2i}^{y_{2i}-k} \lambda_0^{k}}{(y_{1i}-k)!(y_{2i}-k)!(k)!} \right) \tag{3}$$

$s = \min(y_1, y_2)$

Dengan model λ_0 adalah suatu konstanta, selanjutnya ditransformasi dengan $\lambda_{ji} + \lambda_0 = e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_j}$ sehingga diperoleh fungsi *likelihood* yang baru yaitu :

$$L(\lambda_0, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) = \prod_{i=1}^{n} \left(\exp(-\lambda_0) - \exp\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1} - \lambda_0\right) - \exp\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - \lambda_0\right)\right) W_i$$

dengan

$$W_i = \sum_{k=0}^{\min(y_{1i}, y_{2i})} \frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1} - \lambda_0\right)^{y_{1i}-k} \left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - \lambda_0\right)^{y_{2i}-k}}{(y_{1i}-k)!\,(y_{2i}-k)!} \cdot \frac{(\lambda_0)^k}{k!}$$

Sehingga fungsi ln *likelihood* diperoleh sebagai berikut :

$$Q = \ln L(\lambda_0, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) = -n\lambda_0 - \sum_{i=1}^{n} \left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1} - \lambda_0\right) - \sum_{i=1}^{n} \left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - \lambda_0\right) + \sum_{i=1}^{n} \ln W_i$$

dengan

$$W_i = \sum_{k=0}^{\min(y_{1i}, y_{2i})} W_{1i}.W_{2i}$$

$$W_{1i} = \frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1} - \lambda_0\right)^{y_{1i}-k}}{(y_{1i}-k)!}$$

$$W_{2i} = \frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - \lambda_0\right)^{y_{2i}-k} (\lambda_0)^k}{(y_{2i}-k)!\,k!}$$

Q diturunkan terhadap $\boldsymbol{\beta}$

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda_0} = n + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{W_i} \frac{\partial W_i}{\partial \lambda_0}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} = -\sum_{i=1}^{n} \exp\left(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1\right) \mathbf{x}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{W_i} \frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_1}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} = -\sum_{i=1}^{n} \exp\left(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2\right) \mathbf{x}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{W_i} \frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}$$

W_{1i} diturunkan terhadap λ_0

$$\frac{\partial W_{1i}}{\partial \lambda_0} = \frac{(y_{1i}-k)\left(e^{\mathbf{x_i}^T\boldsymbol{\beta}_1}-\lambda_0\right)^{y_{1i}-k-1}.-1}{(y_{1i}-k)!}$$

$$= \frac{-(y_{1i}-k)\left(e^{\mathbf{x_i}^T\boldsymbol{\beta}_1}-\lambda_0\right)^{y_{1i}-k-1}}{(y_{1i}-k)(y_{1i}-k-1)!}$$

$$= \frac{-\left(e^{\mathbf{x_i}^T\boldsymbol{\beta}_1}-\lambda_0\right)^{y_{1i}-k-1}}{(y_{1i}-k-1)!}$$

W_{2i} diturunkan terhadap λ_0

$$W_{2i} = \frac{\left(e^{\mathbf{x_i}^T\boldsymbol{\beta}_2}-\lambda_0\right)^{y_{2i}-k}(\lambda_0)^k}{(y_{2i}-k)!\,k!}$$

$$\frac{\partial W_{1i}}{\partial \lambda_0} = u'v + v'u$$

dengan

$$u = \frac{\left(e^{\mathbf{x_i}^T\boldsymbol{\beta}_2}-\lambda_0\right)^{y_{2i}-k}}{(y_{2i}-k)!}$$

$$v = \frac{(\lambda_0)^k}{k!}$$

$$u' = \frac{-(y_{2i}-k)\left(e^{\mathbf{x_i}^T\boldsymbol{\beta}_2}-\lambda_0\right)^{y_{2i}-k-1}}{(y_{2i}-k)!}$$

$$v' = \frac{k(\lambda_0)^{k-1}}{k!}$$

$$\frac{\partial W_{2i}}{\partial \lambda_0} = \frac{-(y_{2i}-k)\left(e^{\mathbf{x_i}^T\boldsymbol{\beta}_2}-\lambda_0\right)^{y_{2i}-k-1}}{(y_{2i}-k)!}.\frac{(\lambda_0)^k}{k!} + \frac{k(\lambda_0)^{k-1}}{k!}.\frac{\left(e^{\mathbf{x_i}^T\boldsymbol{\beta}_2}-\lambda_0\right)^{y_{2i}-k}}{(y_{2i}-k)!}$$

$$= \frac{\left(e^{\mathbf{x_i}^T\boldsymbol{\beta}_2}-\lambda_0\right)^{y_{2i}-k}}{(y_{2i}-k)!}.\frac{(\lambda_0)^k}{k!}\left[\frac{-(y_{2i}-k)}{\left(e^{\mathbf{x_i}^T\boldsymbol{\beta}_2}-\lambda_0\right)} + \frac{k}{\lambda_0}\right]$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\lambda_0}} = \sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})}\left(\frac{\partial W_{1i}}{\partial \boldsymbol{\lambda_0}}W_{2i} + \frac{\partial W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\lambda_0}}W_{1i}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})}\frac{-(y_{1i}-k)\left(e^{\mathbf{x_i}^T\boldsymbol{\beta}_1}-\lambda_0\right)^{y_{1i}-k-1}}{(y_{1i}-k)!}.\frac{\left(e^{\mathbf{x_i}^T\boldsymbol{\beta}_2}-\lambda_0\right)^{y_{2i}-k}(\lambda_0)^k}{(y_{2i}-k)!k!} + \frac{\left(e^{\mathbf{x_i}^T\boldsymbol{\beta}_2}-\lambda_0\right)^{y_{2i}-k}}{(y_{2i}-k)!}.\frac{(\lambda_0)^k}{k!}.$$

$$\left[\frac{-(y_{2i}-k)}{\left(e^{\mathbf{x_i}^T\boldsymbol{\beta}_2}-\lambda_0\right)} + \frac{k}{\lambda_0}\right]\frac{\left(e^{\mathbf{x_i}^T\boldsymbol{\beta}_1}-\lambda_0\right)^{y_{1i}-k}}{(y_{1i}-k)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})} \frac{\left(e^{\mathbf{x_i}^T\boldsymbol{\beta}_1}-\lambda_0\right)^{y_{1i}-k}}{(y_{1i}-k)!} \cdot \frac{\left(e^{\mathbf{x_i}^T\boldsymbol{\beta}_2}-\lambda_0\right)^{y_{2i}-k}(\lambda_0)^k}{(y_{2i}-k)!\,k!}$$

$$\left[\frac{-(y_{1i}-k)}{e^{\mathbf{x_i}^T\boldsymbol{\beta}_1}-\lambda_0} + \frac{-(y_{2i}-k)}{\left(e^{\mathbf{x_i}^T\boldsymbol{\beta}_2}-\lambda_0\right)} + \frac{k}{\lambda_0}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})} \frac{\left(e^{\mathbf{x_i}^T\boldsymbol{\beta}_1}-\lambda_0\right)^{y_{1i}-k}}{(y_{1i}-k)!} \cdot \frac{\left(e^{\mathbf{x_i}^T\boldsymbol{\beta}_2}-\lambda_0\right)^{y_{2i}-k}(\lambda_0)^k}{(y_{2i}-k)!\,k!}$$

$$\left[\frac{(-y_{1i}+k)}{e^{\mathbf{x_i}^T\boldsymbol{\beta}_1}-\lambda_0} + \frac{(-y_{2i}+k)}{\left(e^{\mathbf{x_i}^T\boldsymbol{\beta}_2}-\lambda_0\right)} + \frac{k}{\lambda_0}\right]$$

W_{1i} diturunkan terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$

$$\frac{\partial W_{1i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} = \frac{(y_{1i}-k)\left(e^{\mathbf{x_i}^T\boldsymbol{\beta}_1}-\lambda_0\right)^{y_{1i}-k-1}\left(e^{\mathbf{x_i}^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x_i}}{(y_{1i}-k)!}$$

W_{2i} diturunkan terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$

$$\frac{\partial W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} = 0$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} = \sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})} \left(\frac{\partial W_{1i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} W_{2i} + \frac{\partial W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} W_{1i}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})} \frac{(y_{1i}-k)\left(e^{\mathbf{x_i}^T\boldsymbol{\beta}_1}-\lambda_0\right)^{y_{1i}-k-1}\left(e^{\mathbf{x_i}^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x_i}}{(y_{1i}-k)!} \cdot \frac{\left(e^{\mathbf{x_i}^T\boldsymbol{\beta}_2}-\lambda_0\right)^{y_{2i}-k}(\lambda_0)^k}{(y_{2i}-k)!\,k!}$$

W_{1i} diturunkan terhadap $\boldsymbol{\beta}_2$

$$\frac{\partial W_{1i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} = 0$$

W_{2i} diturunkan terhadap $\boldsymbol{\beta}_2$

$$\frac{\partial W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} = \frac{(y_{2i}-k)\left(e^{\mathbf{x_i}^T\boldsymbol{\beta}_2}-\lambda_0\right)^{y_{1i}-k-1}\left(e^{\mathbf{x_i}^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)\mathbf{x_i}}{(y_{2i}-k)!} \cdot \frac{(\lambda_0)^k}{k!}$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} = \sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})} \left(\frac{\partial W_{1i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} W_{2i} + \frac{\partial W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} W_{1i}\right)$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} = \sum_{k=0}^{\min(y_{1i},y_{2i})} \frac{(y_{2i}-k)\left(e^{\mathbf{x_i}^T\boldsymbol{\beta}_2}-\lambda_0\right)^{y_{2i}-k-1}\left(e^{\mathbf{x_i}^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)\mathbf{x_i}}{(y_{2i}-k)!} \cdot \frac{(\lambda_0)^k}{k!} \cdot \frac{\left(e^{\mathbf{x_i}^T\boldsymbol{\beta}_1}-\lambda_0\right)^{y_{1i}-k}}{(y_{1i}-k)!}$$

Turunan kedua sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \lambda_0{}^2} = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{W_i}\frac{\partial^2 W_i}{\partial \lambda_0{}^2}\right)-\left(\frac{1}{W_i}\frac{\partial W_i}{\partial \lambda_0}\right)^2\right]$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \boldsymbol{\beta}_1^T} = -\sum_{i=1}^{n}\exp\left(\mathbf{x}_i{}^T\boldsymbol{\beta}_1\right)\mathbf{x}_\mathbf{i}\mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{T} + \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{W_i}\frac{\partial^2 W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \boldsymbol{\beta}_1^T}\right)-\left(\frac{1}{W_i^2}\frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_1}\frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T}\right)\right]$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \boldsymbol{\beta}_2^T} = -\sum_{i=1}^{n}\exp\left(\mathbf{x}_i{}^T\boldsymbol{\beta}_2\right)\mathbf{x}_\mathbf{i}\mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{T} + \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{W_i}\frac{\partial^2 W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \boldsymbol{\beta}_2^T}\right)-\left(\frac{1}{W_i^2}\frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}\frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T}\right)\right]$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \lambda_0 \partial \boldsymbol{\beta}_1} = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{W_i}\frac{\partial^2 W_i}{\partial \lambda_0 \partial \boldsymbol{\beta}_1}\right)-\left(\frac{1}{W_i^2}\frac{\partial W_i}{\partial \lambda_0}\frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_1}\right)\right]$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \lambda_0 \partial \boldsymbol{\beta}_2} = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{W_i}\frac{\partial^2 W_i}{\partial \lambda_0 \partial \boldsymbol{\beta}_2}\right)-\left(\frac{1}{W_i^2}\frac{\partial W_i}{\partial \lambda_0}\frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}\right)\right]$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_2} = -\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{W_i}\frac{\partial^2 W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_2}\right)-\left(\frac{1}{W_i^2}\frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_1}\frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}\right)\right]$$

Karena hasil persamaan di atas tidak memberikan suatu persamaan yang eksplisit maka digunakan suatu metode yaitu metode *Newton-Rapshon* dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Menentukan nilai taksiran awal parameter $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(0)}$ dengan $\boldsymbol{\theta} = \left(\lambda_0 \ \boldsymbol{\beta}_1^\mathbf{T} \ \boldsymbol{\beta}_2^\mathbf{T}\right)^T$ di mana $\ln L(\boldsymbol{\theta}) = Q$. Niai taksiran awal parameter $\hat{\lambda}_{0(0)}$ dapat digunakan cov[Y_1,Y_2]= λ_0. Nilai taksiran awal $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{j}(0)}$ diperoleh dengan metode *Ordinary Least Ssquare* (OLS), yaitu
$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{j}(0)} = \left(\mathbf{X}^\mathbf{T}\mathbf{X}\right)^{-1}\left(\mathbf{X}^\mathbf{T}\mathbf{Y}_\mathbf{j}\right) \text{dengan j=1,2.} \tag{4}$$

2. Membentuk vektor gradien **g**
$$\mathbf{g}^T\left(\boldsymbol{\theta}_{(m)}\right)_{(k+1)1} = \left(\frac{\partial Q}{\partial \lambda_0}, \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^\mathbf{T}}, \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^\mathbf{T}}\right)_{\theta=\theta_{(m)}} \tag{5}$$

3. Membentuk matriks Hessian **H**
$$\mathbf{H}\left(\boldsymbol{\theta}_{(m)}\right)_{(k+1)x(k+1)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 Q}{\partial \lambda_0{}^2} & \dfrac{\partial^2 Q}{\partial \lambda_0 \partial \boldsymbol{\beta}_1} & \dfrac{\partial^2 Q}{\partial \lambda_0 \partial \boldsymbol{\beta}_2} \\ & \dfrac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} & \dfrac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_2} \\ \textit{simetris} & & \dfrac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}(m)} \tag{6}$$

4. Memasukkan nilai ke dalam $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(0)}$ elemen-elemen vektor **g** dan matriks **H**, sehingga diperoleh vektor **g(** $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(0)}$ **)** dan matriks **H(** $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(0)}$ **)**

5. Mulai dari m = 0 dilakukan iterasi pada persamaan
$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{j}(m+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{j}(m)} - \mathbf{H}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right)\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right) \tag{7}$$

Nilai $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}$ merupakan sekumpulan penaksir parameter yang konvergen saat iterasi ke-m.

6. Jika belum mendapatkan penaksiran parameter yang konvergen, maka dilanjutkan kembali ke langkah 5 hingga iterasi ke m = m+1. Iterasi akan berhenti apabila nilai dari $\left\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m+1)} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{m}\right\| \leq \varepsilon$, ε adalah bilangan yang sangat kecil.

4.2. Pengujian Parameter Regresi Poisson Bivariat untuk Kovarian Konstan

Untuk menentukan nilai statistik uji, terlebih dahulu ditentukan dua buah fungsi likelihood yang berhubungan dengan model regresi yang diperoleh. Fungsi-fungsi *likelihood* yang dimaksud adalah $L(\hat{\Omega})$ yaitu nilai *maximum likelihood* untuk model yang lebih lengkap dengan melibatkan variabel prediktor dan $L(\hat{\omega})$, yaitu nilai *maximum likelihood* untuk model sederhana tanpa melibatkan variabel prediktor. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menentukan statistik uji dalam pengujian parameter dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT) dinotasikan dengan,

$$D(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = -2\ln\Lambda = -2\ln\left(\frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})}\right) \tag{8}$$

Hipotesis yang digunakan adalah :

$H_0 : \beta_{j1} = \beta_{j2} = ... = \beta_{jk} = 0$

H_1 : paling sedikit ada satu $\beta_{jl} \neq 0$; $j = 1, 2$; $k = 1, 2, ..., 8$

Himpunan parameter di bawah H_0 adalah $\omega = \{\beta_{10}, \beta_{20}\}$, dengan fungsi *likelihood* sebagai berikut :

$$L(\omega) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i; \lambda_0; \beta_{10}; \beta_{20})$$

$$L(\omega) = \prod_{i=1}^{n} \left(\exp\left(\lambda_0 - e^{\beta_{10}} - e^{\beta_{20}}\right).W_i\right)$$

Nilai $W_i = \sum_{k=0}^{\min(y_{1i}, y_{2i})} \frac{\left(e^{\beta_{10}} - \lambda_0\right)^{y_{1i}-k}\left(e^{\beta_{20}} - \lambda_0\right)^{y_{2i}-k}(\lambda_0)^k}{(y_{1i}-k)!(y_{2i}-k)!k!}$

$$L(\hat{\omega}) = \max_{\omega} L(\omega)$$

$$L(\hat{\omega}) = \prod_{i=1}^{n} \left(\exp\left(\hat{\lambda}_0 - e^{\hat{\beta}_{10}} - e^{\hat{\beta}_{20}}\right).W_i\right)$$

Nilai $W_i = \sum_{k=0}^{\min(y_{1i}, y_{2i})} \frac{\left(e^{\hat{\beta}_{10}} - \hat{\lambda}_0\right)^{y_{1i}-k}\left(e^{\hat{\beta}_{20}} - \hat{\lambda}_0\right)^{y_{2i}-k}(\hat{\lambda}_0)^k}{(y_{1i}-k)!(y_{2i}-k)!k!}$

Himpunan parameter di bawah populasi adalah $\Omega = \{\lambda_0, \beta_{j0}, \beta_{j1}, ..., \beta_{jk};\ j = 1, 2\}$ sehingga fungsi *likelihood*nya sebagai berikut :

$$L(\Omega) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i; \lambda_0; \boldsymbol{\beta}_1; \boldsymbol{\beta}_2)$$

$$L(\Omega) = \prod_{i=1}^{n} \left(\exp\left(\lambda_0 - e^{\mathbf{x_i}^T\boldsymbol{\beta}_1} - e^{\mathbf{x_i}^T\boldsymbol{\beta}_2}\right). W_i\right)$$

dengan $W_i = \sum_{k=0}^{\min(y_{1i}, y_{2i})} \frac{\left(e^{\mathbf{x_i}^T\boldsymbol{\beta}_1} - \lambda_0\right)^{y_{1i}-k}\left(e^{\mathbf{x_i}^T\boldsymbol{\beta}_2} - \lambda_0\right)^{y_{2i}-k}}{(y_{1i}-k)!(y_{2i}-k)!} \cdot \frac{(\lambda_0)^k}{k!}$

$$L(\hat{\Omega}) = \max_{\Omega} L(\Omega)$$

$$L(\hat{\Omega}) = \prod_{i=1}^{n} \left(\exp\left(\hat{\lambda}_0 - e^{\mathbf{x_i}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_1} - e^{\mathbf{x_i}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_2} \right). W_i \right)$$

dengan $W_i = \sum_{k=0}^{\min(y_{1i}, y_{2i})} \frac{\left(e^{\mathbf{x_i}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_1} - \hat{\lambda}_0 \right)^{y_{1i}-k} \left(e^{\mathbf{x_i}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_2} - \hat{\lambda}_0 \right)^{y_{2i}-k}}{(y_{1i}-k)!(y_{2i}-k)!} \cdot \frac{\left(\hat{\lambda}_0 \right)^k}{k!}$

dengan rumus

$$D\left(\hat{\boldsymbol{\beta}} \right) = -2Ln\left[\frac{L(\hat{\omega})}{L(\Omega} \right]$$

$$= 2\left[\ln L\left(\hat{\Omega} \right) - \ln L(\hat{\omega}) \right]$$

$$= 2\left[\left(-\sum_{i=1}^{n} \exp\left(\mathbf{x_i}^T \boldsymbol{\beta}_1 \right) - \sum_{i=1}^{n} \exp\left(\mathbf{x_i}^T \boldsymbol{\beta}_2 \right) + \sum_{i=1}^{n} \ln W_i \right) - \left(-\sum_{i=1}^{n} \exp(\beta_{10}) - \sum_{i=1}^{n} \exp(\beta_{20}) + \sum_{i=1}^{n} \ln W_i \right) \right] \quad (9)$$

$D\left(\hat{\boldsymbol{\beta}} \right)$ adalah devians model regresi poisson bivariat dengan menggunakan pendekatan distribusi *chi-square* dengan derajat bebas *v* dan H_0 ditolak jika $D\left(\hat{\boldsymbol{\beta}} \right) > \chi^2_{(\alpha,v)}$

Pengujian hipotesis secara parsial adalah sebagai berikut :

$H_0 : \beta_{jk} = 0$

$H_1 : \beta_{jk} \neq 0; j = 1, 2 ; k = 1, 2, ..., 8$

Statistik uji :

$$z = \frac{\hat{\beta}_{jk}}{se\left(\hat{\beta}_{jk} \right)} \quad (10)$$

Keputusan : daerah penolakan H_0 adalah |z hitung| lebih besar dari $z_{\alpha/2}$. Nilai $se\left(\hat{\beta}_{jk} \right)$ diperoleh dari diagonal ke (j+1) dari var$\left(\hat{\boldsymbol{\theta}} \right)$.

4.3. Pemodelan Regresi Poisson Bivariat Kematian Bayi Dan Kematian Ibu di Propinsi Jawa Tengah Tahun 2015

Tabel 1 Estimasi Parameter Model Regresi Poisson Bivariat pada Kematian Bayi dan Kematian Ibu di Provinsi Jawa Tengah Tahun 2015

Parameter	Kematian Bayi			Kematian Ibu		
	Estimasi	SE	Z Hitung	Estimasi	SE	Z Hitung
β_0	10,952	3,429	3,19*	50,011	26,410	1,89
β_1	-0,074	-0,013	5,59*	-4,369	0,029	-149,89*
β_2	0,007	0,038	0,19	2,619	-1,267	-2,07*
β_3	-0,021	-0,006	3,51*	-0,471	0,911	-0,52
β_4	0,042	0,007	6,41*	1,511	0,261	5,79*
β_5	-0,001	-0,001	1,47	0,220	0,164	1,34
β_6	0,002	0,003	0,69	0,074	-0,229	-0,32
β_7	0,007	0,002	2,95*	-0,146	-0,233	0,63
β_8	-0,016	-0,008	2,03*	-0,042	-0,146	0,29

*) Signifikan dengan taraf signifikansi 5%

Tabel 2 Estimasi Parameter λ_0 Kovarian Konstan

Parameter	λ_0		
	Estimasi	SE	Z Hitung
λ_0	2,782	2,741	1,02

Pengujian parameter secara serentak, hipotesis yang digunakan adalah sebagai berikut :

$$H_0 : \beta_{j1} = \beta_{j2} = ... = \beta_{j8} = 0 \ ; \ j = 1,2$$

$$H_1 : \text{paling sedikit ada satu } \beta_{jk} \neq 0; \ j = 1,2; \ k = 1,2,...,8$$

diperoleh nilai $D(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ sebesar 2.404,59 dengan tingkat signifikansi sebesar 5% yang menghasilkan $\chi^2_{(0,05;17)}$ = 27,587 karena nilai $D(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ lebih besar dari nilai χ^2 maka tolak H_0 yang artinya minimal ada satu variabel yang berpengaruh terhadap variabel respon. Selanjutnya akan dilakukan pengujian parameter secara parsial.

Berdasarkan nilai dari Tabel 1 dengan tingkat signifikansi sebesar 5% bahwa ada lima variabel prediktor yang memiliki nilai Z hitung yang lebih besar daripada Z tabel (α/2 = ±1,96) pada model persamaan kematian ibu, sedangkan pada model kematian bayi ada tiga variabel yang signifikan. Variabel yang berpengaruh signifikan terhadap jumlah kematian bayi adalah persentase persalinan oleh tenaga kesehatan (X_1), persentase ibu hamil melaksanakan program K4 (X_3), persentase ibu hamil yang mendapatkan tablet Fe3 (X_4), persentase bayi yang diberi ASI eksklusif (X_7), dan persentase rumah tangga berperilaku hidup bersih dan sehat (X_8). Variabel yang berpengaruh signifikan terhadap kematian ibu adalah persentase persalinan oleh tenaga kesehatan (X_1), Persentase ibu bersalin mendapatkan pelayanan kesehatan nifas (X_2), dan persentase ibu hamil yang mendapatkan tablet Fe3 (X_4).

Estimasi persamaan regresi diperoleh sebagai berikut:

$$\hat{\lambda}_1 = \exp\big(10,952 - 0,074X_1 + 0,007X_2 - 0,021X_3 + 0,042X_4 - 0,001X_5 + \\ 0,002X_6 + 0,007X_7 - 0,016X_8\big)$$

$$\hat{\lambda}_2 = \exp\big(50,011 - 4,369X_1 + 2,619X_2 - 0,471X_3 + 1,511X_4 + 0,220X_5 + \\ 0,074X_6 - 0,146X_7 - 0,042X_8\big)$$

Pada kasus kematian bayi, setiap penambahan 1% jumlah persalinan oleh tenaga kesehatan maka akan melipatgandakan rata-rata jumlah kasus kematian bayi sebesar 0,92 kali dari rata-rata jumlah kematian bayi semula jika variabel lain tidak dilibatkan dalam model. Setiap penambahan 1% jumlah ibu hamil melaksanakan program K4 maka akan melipatgandakan rata-rata jumlah kematian bayi sebesar 0,98 kali dari rata-rata jumlah kematian bayi semula jika variabel lain tidak dilibatkan dalam model.

Pada kasus kematian ibu, setiap penambahan 1% jumlah persalinan oleh tenaga kesehatan maka akan melipatgandakan rata-rata jumlah kasus kematian ibu sebesar 0,01 kali dari rata-rata jumlah kematian ibu semula jika variabel lain tidak dilibatkan dalam model. Setiap penambahan 1% jumlah ibu bersalin mendapatkan pelayanan kesehatan nifas maka akan melipatgandakan rata-rata jumlah kematian ibu sebesar 0,01 kali dari rata-rata jumlah kematian ibu semula jika variabel lain tidak dilibatkan dalam model.

5. KESIMPULAN

Kesimpulan yang dapat diambil dari penelitian ini adalah:

1. Regresi poisson bivariat mempunyai parameter yang tidak *close form*.
2. Model regresi poisson bivariat variabel yang berpengaruh signifikan terhadap jumlah kematian bayi adalah persentase persalinan oleh tenaga kesehatan (X_1), persentase ibu hamil melaksanakan program K4 (X_3), persentase ibu hamil yang mendapatkan tablet Fe3 (X_4), persentase bayi yang diberi ASI eksklusif (X_7), dan persentase rumah tangga berperilaku hidup bersih dan sehat (X_8). Variabel yang berpengaruh signifikan terhadap kematian ibu adalah persentase persalinan oleh tenaga kesehatan (X_1), Persentase ibu bersalin mendapatkan pelayanan kesehatan nifas (X_2), dan persentase ibu hamil yang mendapatkan tablet Fe3 (X_4).

DAFTAR PUSTAKA

Agresti, A. 2007. *An Introduction to Categorical Data Analysis.* Second Edition. John Wiley & Sons, Inc. New York.

Bingham, N.H dan Fry, J.M. 2010. *Regression Linear Models in Statistics.* Springer. London.

Cameron, A.C. dan Trivedi, P.K. 1998. *Regression Analysis of Count Data*. Cambridge University Press. USA.

Chou, N. dan D. Steenhard. 2011. Bivariate Count Data Regression Models – A SAS® Macro Program. *Proceedings SAS Global Forum 2011*, paper 355-2011.

Dinkes. 2015. *Profil Kesehatan Propinsi Jawa Tengah*. Semarang: Dinkes Jateng.

Gurmu, S. dan Elder, J. 2007. A Simple Bivariate Count Data Regression Model. *Economics Bulletin*, Vol.3, No. 11, hal. 1-10.

Holgate, P. 1964. Estimation for the Bivariate Poisson Distribution. *Biometrika*, Vol 51, hal. 241-245.

Jung, C. R. dan Winkelmann, R. 1993. Two Aspect of Labor Mobility: A Bivariate Poisson Regression Approach. *Journal Empirical Economics,* Vol 18, 543-556.

Karlis, D. dan Ntzoufras, I. 2005. Bivariate Poisson and Diagonal Inflated Bivariate Poisson Regression Models in R. *Journal of Statistical Software,* Vol 14, 1-36.

Long, J.S. .1997. *Regression Models for Categorical and Limited Dependent Variables*. Number 7 in Advance Quantitative Techniques in The Social Sciences, Sage Publications, California.

Winkelmann, R. 2008. *Econometric Analysis of Count Data*. 5th edition. Springer: Berlin.