Media Statistika

p-ISSN 1979 – 3693 e-ISSN 2477 – 0647
MEDIA STATISTIKA 11(1) 2018: 39-51
http://ejournal.undip.ac.id/index.php/media_statistika

PENGARUH *SKEWNESS* DAN KURTOSIS DALAM MODEL VALUASI OBLIGASI

Abdurakhman[1], Di Asih I Maruddani[2]
[1] Departemen Matematika, Universitas Gadjah Mada
[2] Departemen Statistika, Universitas Diponegoro

e-mail: rachmanstat@ugm.ac.id

DOI: 10.14710/medstat.11.1.39-51

Article Info:
Received: 20 April 2018
Accepted: 11 July 2018
Available Online: 20 August 2018

Keywords:
Skewness, Kurtosis, Gram-Charlier, Hermite polynomial
.

Abstract: The Gram-Charlier expansion, where skewness and kurtosis directly appear as parameters, has become popular in finance as a generalization of the normal density. Non-normal skewness and kurtosis of underlying asset of bond issuer company are significantly contributes to the phenomenon of volatility smile. Hermite polynomial is used to get an expansion of the probability distribution. In this paper, Gram-Charlier model is applied to BTPN Bond which is issued in 2017. The result showed that Gram-Charlier model is more consistent than Black-Scholes model when the skewness and kurtosis are taken into account.

1. PENDAHULUAN

Obligasi merupakan salah satu instrumen investasi yang cukup diminati oleh investor karena memberikan pendapatan tetap. Di samping memberikan keuntungan, berinvestasi pada obligasi juga memiliki risiko, salah satunya adalah risiko kredit. Risiko kredit terjadi apabila pada saat jatuh tempo perusahaan penerbit obligasi tidak mampu membayar kewajibannya, yaitu membayar kupon dan pokok obligasi sehingga dinyatakan bangkrut. Untuk mengantisipasi risiko tersebut diperlukan suatu valuasi obligasi guna melihat kemampuan perusahaan penerbit obligasi dalam memenuhi kewajibannya. Valuasi obligasi juga meliputi perhitungan peluang kebangkrutan perusahaan penerbit obligasi.

Pemodelan valuasi obligasi tanpa kupon mulai dikerjakan oleh Merton (1974) menggunakan formula serupa dengan harga opsi *Black-Scholes* (Black & Scholes, 1973) Asumsi praktis dalam model *Black-Scholes* adalah *return* aset perusahaan berdistribusi normal dengan volatilitas konstan. Namun, seringkali ditemukan *return* aset yang tidak berdistribusi normal, dalam hal ini mempunyai nilai *skewness* dan kurtosis yang tidak sesuai standar. Jarrow dan Rudd (1982) menggunakan deviasi dari momen Gaussian sebagai pendekatan distribusi yang tidak diketahui. Ekspansi Gram-Charlier merupakan teori yang cukup popular di bidang finansial sebagai generalisasi dari distribusi normal untuk mengatasi keberadaan parameter *skewness* dan kurtosis (Jondeau dan Rockinger, 2001). Salah satu metode aproksimasi yang digunakan adalah pendekatan alternatif polinomial Hermite (Kendall et al, 1994).

Knight dan Satchell (1997) telah menerapkan teori Gram-Charlier untuk pengukuran harga opsi. Berberan Santos (2007) mengembangkan model Gram-Charlier dengan polinomial Hermite untuk sebarang distribusi dan diterapkan pada penilaian harga opsi. Chateau dan Dufresne (2017) menggunakan polinomial Hermite untuk ekspansi Gram-Charlier pada penilaian harga opsi dengan aset dasar berdistribusi normal. Abdurakhman (2017) meneliti tentang model non normal untuk optimisasi portofolio saham. Pendekatan opsi untuk valuasi obligasi diperkenalkan pertama kali oleh Merton (1974) dengan asumsi-asumsi yang sangat mengikat, khususnya asumsi normalitas. Selanjutnya penerapan kasus valuasi obligasi data di Indonesia telah dilakukan pada model valuasi obligasi tanpa kupon dengan metode KMV (Maruddani et al, 2011a), valuasi obligasi dan pengukuran *credit spreads* dengan model Merton (Maruddani et al, 2011b), valuasi obligasi berdasarkan pola waktu kebangkrutan (Maruddani, 2015).

Berdasarkan latar belakang masalah di atas, paper ini mencari model matematika baru untuk valuasi obligasi berkupon satu periode dengan data aset mempunyai kemencengan (*skewed*) dan ekor gemuk (kurtosis). Valuasi yang dilakukan meliputi perhitungan estimasi ekuitas dan peluang kebangkrutan perusahaan yang mengeluarkan obligasi berdasarkan pada distribusi normal standard model ekspansi Gram-Charlier dengan pendekatan polinomial Hermite.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Valuasi Obligasi dengan Model *Black-Scholes*

Obligasi kupon satu periode adalah obligasi yang memberikan pembayaran kupon kepada investor sebanyak satu kali selama periode obligasi. Pemberian kupon dilaksanakan pada saat jatuh tempo. Selain kewajiban membayar kupon sebesar K, penerbit obligasi memiliki kewajiban membayar hutang pokok *(face value)* kepada pemegang obligasi. Pemodelan yang digunakan untuk melihat struktur kekayaan perusahaan menggunakan model aset adalah jumlahan dari Modal (Ekuitas) dan Hutang (Liabilitas) sebagai berikut:

$$A_T = L_T + E_T \qquad (1)$$

A_T =Aset perusahaan pada waktu ke-T
L_T = Liabilitas perusahaan pada waktu ke-T (obligasi)
E_T = Ekuitas perusahaan pada waktu ke-T (modal)

Pada saat jatuh tempo terdapat dua kemungkinan keadaan, yaitu :

1. Jika nilai aset lebih dari atau sama dengan pokok hutang ditambah kupon yaitu $A_T \geq K$, maka penerbit obligasi akan membayar kepada investor sebesar K. Dan penerbit obligasi memiliki modal atau ekuitas sebesar $A_T - K$.
2. Jika nilai aset kurang dari pokok hutang ditambah kupon yaitu $A_T < K$, maka penerbit obligasi memiliki modal atau ekuitas sebesar 0, artinya penerbit obligasi bangkrut.

Berdasarkan keadaan tersebut di atas maka struktur modal perusahaan pada saat jatuh tempo (T) dapat dimodelkan dalam Tabel 1.

Tabel 1 Struktur Modal Perusahaan Pada Saat Jatuh Tempo

Posisi Aset	Status Perusahaan	Liabilitas (Obligasi)	Ekuitas (Modal)
$A_T \geq K$	Tidak bangkrut	K	$A_T - K$
$A_T < K$	Bangkrut	A_T	0

Dari Tabel 1, pada waktu jatuh tempo T diperoleh formula nilai ekuitas adalah max $\{A_T - K, 0\}$. Nilai ekuitas pada saat penandatanganan kontrak obligasi merupakan present value dari nilai harapan ekuitas pada waktu jatuh tempo.

$$E_{T_0}^T = e^{-rT} E[\max{(A_T - K, 0)}] \quad (2)$$

Nilai aset perusahaan pada waktu ke-T diasumsikan mengikuti gerak brownian geometrik

$$A_T = A_0 \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T\right\} \quad (3)$$

Diketahui $W_T \sim N(0, T)$ dan $\ln A_T \sim N(\mu, \sigma^2)$, dengan $\mu = \ln A_0 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T$ dan variansi $\sigma^2 T$. Fungsi densitas A_T pada persamaan (3) berdistribusi lognormal

$$f(A_T) = \begin{cases} \frac{1}{A_T \sigma\sqrt{T}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln A_T - \mu}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2} & A_T > 0 \\ 0 & A_T \leq 0 \end{cases} \quad (4)$$

Nilai ekuitas dapat dijabarkan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} E_{T_0}^T &= e^{-rT} E[\max{(A_T - K, 0)}] \\ &= e^{-rT} \int_0^\infty \max(A_T - K, 0) \, f(A_T) \, dA_T \\ &= A_0[\mathrm{N}(d_1)] - Ke^{-rT}[\mathrm{N}(d_2)] \end{aligned} \quad (5)$$

dengan $d_1 = \frac{\ln\frac{A_0}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$ dan $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$.

Selanjutnya dilakukan perhitungan liabilitas dan peluang kebangkrutan pada saat jatuh tempo. Liabilitas merepresentasikan hutang perusahaan, yang dalam paper ini diasumsikan perusahaan mempunyai hutang tunggal.

$$\begin{aligned} L_{T_0}^T &= A_0 - E_{T_0}^T \\ &= A_0 - (A_0[\mathrm{N}(d_1)] - Ke^{-rT}[\mathrm{N}(d_2)]) \\ &= A_0\big(\mathrm{N}(-d_1)\big) + Ke^{-rT}[\mathrm{N}(d_2)] \end{aligned} \quad (6)$$

Kebangkrutan pada saat jatuh tempo dapat terjadi apabila nilai aset kurang dari kewajiban yang harus dipenuhi oleh perusahaan penerbit obligasi, sehingga peluang kebangkrutan pada saat jatuh tempo dapat dihitung dengan formula

$$P(\tau = T) = P(A_T < K) = \mathrm{P}\left(A_0 \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T\right\} < K\right).$$

Dengan transformasi normal standard $= \frac{W_T - 0}{\sqrt{T}}$, $Z \sim N(0,1)$, diperoleh formula peluang kebangkrutan perusahaan

$$\begin{aligned} \Pr\big(A_T < K\big) &= \mathrm{P}\left(A_0 \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma z\sqrt{T}\right\} < K\right) \\ &= \mathrm{P}\left(Z < \frac{\ln\frac{K}{A_0} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ &= \mathrm{N}\left(\frac{\ln\frac{K}{A_0} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \end{aligned} \quad (7)$$

2.1. Polinomial Hermite

Polinomial Hermite pertama kali didefinisikan oleh Laplace pada tahun 1810 meskipun dalam bentuk yang hampir tidak dapat dikenali. Kemudian pada tahun 1859 Chebyshev mempelajari polinomial Hermite secara lebih rinci. Karya Chebyshev diabaikan dan diberi nama belakang Charles Hermite yang menuliskannya kembali dalam bentuk yang baru pada tahun 1865. Polinomial Hermite adalah orthognal pada interval $(-\infty, \infty)$, yang dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$He_n(z)f(z) = (-D)^n f(z), n = 0,1,2,\dots \tag{8}$$

dengan $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$ berdistribusi normal standard. Dari persamaan (8) diperoleh persamaan yang berhubungan yaitu

$$He_n(z)f(z) = (-1)^n \frac{d^n}{dz^n} f(z)$$

$$He_n(z) = (-1)^n e^{\frac{1}{2}z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-\frac{1}{2}z^2} \tag{9}$$

Bentuk lain dari polinomial Hermite adalah

$$He_n(z) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^k n^{[2k]}}{2^k k!} z^{n-2k}$$

$$= z^n - \frac{n^{[2]}}{2\times 1!} z^{n-2} + \frac{n^{[4]}}{2^2\times 2!} z^{n-4} - \frac{n^{[6]}}{2^3\times 1!} z^{n-6} + \cdots \tag{10}$$

dengan $n^{[k]} = \frac{n!}{(n-k)!}$ menotasikan faktorial parsial.

Berdasarkan persamaan (10) diperoleh enam polinomial Hermite pertama yaitu

$He_0(z) = 1$ $\quad$ $He_3(z) = z^3 - 3z$

$He_1(z) = z$ $\quad$ $He_4(z) = z^4 - 6z^2 + 3$

$He_2(z) = z^2 - 1$ $\quad$ $He_5(z) = z^5 - 10z^3 + 15z$

Sifat orthogonal dari Polinomial Hermite yaitu

$$\int_{-\infty}^{\infty} He_m(z) He_n(z) n(z)\, dz = \begin{cases} 0 & , m \neq n \\ m! & , m = n \end{cases} \tag{11}$$

2.3 Ekspansi *Gram-Charlier*

Ekspansi *Gram-Charlier* pertama kali diperkenalkan oleh Jogen Pedesen Gram (27 Juni 1850-29 April 1916), seorang aktuaris dan matematikawan dari Denmark dan astronom Swedia Carl Vilhelm Ludwig Charlier (1 April 1862– 5 November 1934). Studi terbaru tentang ekonomi keuangan telah menggunakan ekpansi *Gram-Charlier* sebagai perangkat semi-nonparametrik untuk mengatasi asumsi normalitas yang tidak terpenuhi. Knight dan Satchell (1997) mengembangkan model valuasi harga opsi menggunakan ekspansi *Gram-Charlier* untuk aset dasar.

Suatu variabel random Z yang diyakini memiliki kemiripan dengan densitas normal dapat dinyatakan sebagai

$$g(z) = p_n(z)\, n(z) \tag{12}$$

dengan $n(z)$ adalah densitas distribusi normal standard, $p_n(z)$ dipilih sedemikian hingga $g(z)$ memiliki moment pertama yang sama dengan moment pertama Z, dan

$$p_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n He_n(z) \tag{13}$$

Selanjutnya fungsi densitas variabel random Z dapat dinyatakan dengan

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n He_n(z) n(z) \tag{14}$$

Jika persamaan (14) kedua ruas dikalikan dengan $He_m(z)$ kemudian diintegralkan dari $-\infty$ sampai ∞ maka diperoleh

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} g(z) He_m(z)\, dz &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n He_n(z) He_m(z) n(z)\, dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^{\infty} He_n(z) He_m(z) n(z)\, dz\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= c_0 \int_{-\infty}^{\infty} He_0(z) He_m(z) n(z)\, dz + c_1 \int_{-\infty}^{\infty} He_1(z) He_m(z) n(z)\, dz + \\ &\quad c_2 \int_{-\infty}^{\infty} He_2(z) He_m(z) n(z)\, dz + \cdots + c_{m-1} \int_{-\infty}^{\infty} He_{m-1}(z) He_m(z) n(z)\, dz + \\ &\quad c_m \int_{-\infty}^{\infty} He_m(z) He_m(z) n(z)\, dz + \cdots\end{aligned}$$

Dengan menggunakan sifat orthogonal polinomial hermite pada saat $m = n$ seperti pada persamaan (11), diperoleh

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(z) He_m(z)\, dz = c_m m! \text{ dan } c_m = \frac{1}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} g(z)\, H_n(z)\, dz\ ,$$

Selanjutnya diperoleh enam nilai c_m pertama sebagai berikut :

$$c_0 = \frac{1}{0!} \int_{-\infty}^{\infty} g(z)\, dz = 1$$

$$c_1 = \frac{1}{1!} \int_{-\infty}^{\infty} g(z) z\, dz = \mu_1$$

$$c_2 = \frac{1}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} g(z)(z^2 - 1)\, dz = \frac{1}{2!}\mu_2 - \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}(\mu_2 - 1)$$

$$c_3 = \frac{1}{3!} \int_{-\infty}^{\infty} g(z)(z^3 - 3z)\, dz = \frac{1}{6}\mu_3 - \frac{1}{2}\mu_1$$

$$c_4 = \frac{1}{4!} \int_{-\infty}^{\infty} g(z)(z^4 - 6z^2 + 3)\, dz = \frac{1}{24}(\mu_4 - 6\mu_2 + 3)$$

$$c_5 = \frac{1}{5!} \int_{-\infty}^{\infty} g(z)(z^5 - 10z^3 + 15z)\, dz = \frac{1}{120}(\mu_5 - 10\mu_3 + 15\mu_1)$$

Diperoleh ekspansi *Gram-Charlier* yang mendefinisikan aproksimasi dari densitas variabel Z sebagai berikut

$$\begin{aligned}g(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n He_n(z) n(z) \\ &= c_0 H_0(z) n(z) + c_1 H_1(z) n(z) + c_2 H_2(z) n(z) + c_3 H_3(z) n(z) \\ &\quad + c_4 H_4(z) n(z) + \cdots \\ &= n(z)\{c_0 H_0(z) + c_1 H_1(z) + c_2 H_2(z) + c_3 H_3(z) + c_4 H_4(z) + \cdots\}\end{aligned}$$

Aproksimasi densitas normal standard sampai momen ke-empat adalah

$$\begin{aligned}g(z) = n(z)\Big\{&1 + \mu_1 z + \frac{1}{2}(\mu_2 - 1)(z^2 - 1) + \left(\frac{1}{6}\mu_3 - \frac{1}{2}\mu_1\right)(z^3 - 3z) \\ &+ \left(\frac{1}{24}(\mu_4 - 6\mu_2 + 3)(z^4 - 6z^2 + 3)\right)\Big\}\end{aligned} \tag{15}$$

2.3 Valuasi Obligasi dengan Model *Gram-Charlier*

Return aset sebuah perusahaan tidak selalu berdistribusi normal, sehingga penggunaan persamaan (5) dan (6) untuk menentukan nilai ekuitas perusahaan guna mengevaluasi obligasi kurang tepat. Oleh karena itu, diperlukan densitas baru, yang lebih cocok mendekati distribusi data seperti ekspansi *Gram-Charlier* $g(z)$ pada persamaan (15) yang memuat informasi *skewness* dan *kurtosis*. Aset perusahaan diasumsikan mengikuti gerak geometric brownian seperti persamaan (3). Selanjutnya diperoleh ln A_T = ln A_0 + (r-0.5σ^2)T+ σW_T , dengan $W_T \sim GC(0, T, \mu_3, \mu_4)$. Karena $\ln A_T$ linier dengan W_T, diperoleh $\ln A_T \sim GC(0, T, \mu_3, \mu_4)$. Untuk menyederhanakan perhitungan, dilakukan transformasi normal standard

$$Z = \frac{\ln A_T - \mu}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{sehingga } Z \sim GC(0,1,\mu_3,\mu_4)$$

Selanjutnya dihitung nilai ekuitas dan liabilitas perusahaan untuk melihat apakah perusahaan mampu membayar hutang pada saat jatuh tempo atau sebaliknya, gagal bayar.

$E_{T_0,GC}^{T}$: present value nilai ekuitas waktu T_0 ekspansi GC, batas bawah integral menjadi

$$\frac{\ln A_T - \left(\ln A_0 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln A_T - \ln A_0 - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln\frac{A_T}{A_0} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = -d_2$$

$$E_{T_0,GC}^{T} = e^{-rT} \int_{-d_2}^{\infty} (A_T - K)\, g(z) dz \qquad (16)$$

Jika didefinisikan $m = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)$ maka diperoleh $A_T = A_0 \exp\{mT + \sigma W_T\}$. Dengan tranformasi $Z = \frac{W_T - 0}{\sqrt{T}}$, diperoleh $Z \sim GC(0,1,\mu_3,\mu_4)$. Nilai aset pada saat T adalah $A_T = A_0 e^{mT + z\sigma\sqrt{T}}$, selanjutnya diperoleh

$$\begin{aligned}
E_{T_0,GC}^{T} &= e^{-rT} \int_{-d_2}^{\infty} (A_T - K)\, g(z) dz \\
&= e^{-rT} \int_{-d_2}^{\infty} \left(A_0 e^{mT + z\sigma\sqrt{T}} - K\right) n(z) \left\{1 + \frac{\mu_3}{3!}(z^3 - 3z) + \frac{\mu_4 - 3}{4!}(z^4 - 6z^2 + 3)\right\} dz \\
&= E_{T_0}^{T_1} + e^{-rT} \int_{-d_2}^{\infty} \left(A_0 e^{mT + z\sigma\sqrt{T}} - K\right) n(z) \left\{\frac{\mu_3}{3!}(z^3 - 3z) + \frac{\mu_4 - 3}{4!}(z^4 - 6z^2 + \right. \\
&\quad \left. 3)\right\} dz \\
&= E_{T_0}^{T_1} + \frac{\mu_3}{3!}\, e^{-rT} \int_{-d_2}^{\infty} \left(A_0 e^{mT + z\sigma\sqrt{T}} - K\right) He_3(z) n(z)\, dz \\
&\quad + \frac{\mu_4 - 3}{4!}\, e^{-rT} \int_{-d_2}^{\infty} \left(A_0 e^{mT + z\sigma\sqrt{T}} - K\right) He_4(z) n(z)\, dz \qquad (17)
\end{aligned}$$

Untuk mempermudah penyelesaian, maka perhitungan dipecah menjadi 2 bagian

$$I_1 = e^{-rT} \int_{-d_2}^{\infty} \left(A_0 e^{mT + z\sigma\sqrt{T}} - K\right) He_3(z) n(z)\, dz$$

dan

$$I_2 = e^{-rT} \int_{-d_2}^{\infty} \left(A_0 e^{mT + z\sigma\sqrt{T}} - K\right) He_4(z) n(z)\, dz$$

Langkah pertama adalah mencari nilai I_1 terlebih dahulu

$$I_1 = e^{-rT}\int_{-d_2}^{\infty}\left(A_0e^{mT+z\sigma\sqrt{T}} - K\right)He_3(z)n(z)dz$$
$$= e^{-rT}\int_{-d_2}^{\infty}\left(A_0e^{mT+z\sigma\sqrt{T}} - K\right)(-1)^3D^3n(z)dz$$
$$= e^{-rT}\int_{-d_2}^{\infty}\left(A_0e^{mT+z\sigma\sqrt{T}} - K\right)(-1)\,(-1)^2\frac{d^3}{dz^3}n(z)dz$$
$$= -e^{-rT}\int_{-d_2}^{\infty}\left(A_0e^{mT+z\sigma\sqrt{T}} - K\right)\frac{d}{dz}\left(\frac{d^2}{dz^2}\right)n(z)dz$$

Selanjutnya digunakan integral parsial $u = A_0e^{mT+z\sigma\sqrt{T}} - K,\ dV = \frac{d}{dz}\left(\frac{d^2}{dz^2}\right)n(z)dz$, diperoleh

$$I_1 = -e^{-rT}\left(\left(A_0e^{mT+z\sigma\sqrt{T}} - K\right)\left(\left(\frac{d^2}{dz^2}\right)n(z)\right)\Bigg|_{-d2}^{\infty}\right)$$
$$-e^{-rT}\left(-\int_{-d_2}^{\infty}\left(\frac{d^2}{dz^2}\right)f(z)\,\sigma\sqrt{T}A_0e^{mT+z\sigma\sqrt{T}}\,dz\right)$$
$$= -e^{-rT}\left[(0-0) - \sigma\sqrt{T}\int_{-d_2}^{\infty}A_0e^{mT+z\sigma\sqrt{T}}\left(\frac{d^2}{dz^2}\right)n(z)\ dz\right]$$
$$= \sigma\sqrt{T}e^{-rT}\int_{-d_2}^{\infty}A_0e^{mT+z\sigma\sqrt{T}}\left(\frac{d^2}{dz^2}\right)n(z)\ dz \qquad (18)$$

Untuk menghitung integral di atas, digunakan integral parsial $u = A_0e^{mT+z\sigma\sqrt{T}}$, $dV = \frac{d^2}{dz^2}n(z)dz$, diperoleh,

$$I_1 = \sigma\sqrt{T}e^{-rT}\left[\left(\left(A_0e^{mT+z\sigma\sqrt{T}}\right)\left(\frac{d}{dz}n(z)\right)|_{-d2}^{\infty}\right) - \int_{-d_2}^{\infty}\frac{d}{dz}n(z)\,\sigma\sqrt{T}A_0e^{mT+z\sigma\sqrt{T}}\ dz\right]$$
$$= \sigma\sqrt{T}e^{-rT}\left[\left(\left(A_0e^{mT+z\sigma\sqrt{T}}\right)\left((-z)n(z)\right)|_{-d2}^{\infty}\right) - \int_{-d_2}^{\infty}\frac{d}{dz}n(z)\,\sigma\sqrt{T}A_0e^{mT+z\sigma\sqrt{T}}\ dz\right]$$
$$= \sigma\sqrt{T}e^{-rT}\left[0 - A_0e^{mT-d_2\sigma\sqrt{T}}(-(-d_2)n(-d_2))\right]$$
$$-\sigma\sqrt{T}e^{-rT}\left[\sigma\sqrt{T}\int_{-d_2}^{\infty}A_0e^{mT+z\sigma\sqrt{T}}\frac{d}{dz}n(z)\ dz\right]$$

Perlu dicatat bahwa $A_0e^{mT-d_2\sigma\sqrt{T}} = K$ dan $Ke^{-rT}\,n(-d_2) = A_0f(d_1)$

$$I_1 = \sigma\sqrt{T}e^{-rT}\left[(0 - K(-(-d_2)n(-d_2))) - \sigma\sqrt{T}\int_{-d_2}^{\infty}A_0e^{mT+z\sigma\sqrt{T}}\frac{d}{dz}n(z)\ dz\right]$$
$$= -\sigma\sqrt{T}A_0n(d_1)(d_2) - \sigma^2Te^{-rT}\int_{-d_2}^{\infty}A_0e^{mT+z\sigma\sqrt{T}}\frac{d}{dz}n(z)\ dz$$

Untuk menghitung integral pada suku kedua persamaan di atas, kembali digunakan integral parsial dengan $u = A_0e^{mT+z\sigma\sqrt{T}}$ dan $dV = \frac{d}{dz}n(z)dz$, diperoleh,

$$I_1 = -\sigma\sqrt{T}A_0n(d_1)(d_2) - \sigma^2Te^{-rT}\begin{bmatrix}\left(\left(A_0e^{mT+z\sigma\sqrt{T}}\right)\left(n(z)\right)|_{-d2}^{\infty}\right)\\ -\int_{-d_2}^{\infty}n(z)\,\sigma\sqrt{T}A_0e^{mT+z\sigma\sqrt{T}}\ dz\end{bmatrix}$$

$$= -\sigma\sqrt{T}A_0 n(d_1)(d_1 - \sigma\sqrt{T}) - \sigma^2 T e^{-rT}\begin{bmatrix}\left(0 - \left(A_0 e^{mT - d_2\sigma\sqrt{T}}\right)\left(n(-d_2)\right)\right) \\ -\sigma\sqrt{T}A_0 e^{mT}\int_{-d_2}^{\infty} e^{z\sigma\sqrt{T}} n(z)\ dz\end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{l} -\sigma\sqrt{T}A_0 n(d_1)(d_1 - \sigma\sqrt{T}) + \sigma^2 T e^{-rT} K n(-d_2) + \\ \left(\sigma\sqrt{T}\right)^3 e^{mT - rT}\int_{-d_2}^{\infty} e^{z\sigma\sqrt{T}} n(z)\, dz \end{array}$$

$$= -\sigma\sqrt{T}A_0 n(d_1)(d_1 - \sigma\sqrt{T}) + \sigma^2 T A_0 n(d_1) + \left(\sigma\sqrt{T}\right)^3 A_0 e^{mT - rT}\int_{-d_2}^{\infty} e^{z\sigma\sqrt{T}} n(z)\, dz$$

$$= \sigma\sqrt{T}A_0 n(d_1)\left[\sigma\sqrt{T} - \left(d_1 - \sigma\sqrt{T}\right)\right] + \left(\sigma\sqrt{T}\right)^3 A_0 e^{(m-r)T}\int_{-d_2}^{\infty} e^{z\sigma\sqrt{T}} n(z)\, dz$$

Untuk menyederhanakan persamaan di atas, dihitung nilai integral pada suku kedua dengan substitusi $y = z - \sigma\sqrt{T}$, diperoleh

$$\int_{-d_2}^{\infty} e^{z\sigma\sqrt{T}} n(z)\, dz = \int_{-d_2}^{\infty} e^{z\sigma\sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\ dz$$

$$= e^{\frac{1}{2}\sigma^2 T}\int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(z - \sigma\sqrt{T}\right)^2}\ dz$$

$$= e^{\frac{1}{2}\sigma^2 T}\int_{-d_1}^{\infty} n(y)\, dy$$

$$= e^{\frac{1}{2}\sigma^2 T}[1 - N(-d_1)]$$

$$= e^{\frac{1}{2}\sigma^2 T} N(d_1)$$

Sehingga didapatkan,

$$I_1 = \sigma\sqrt{T}A_0 n(d_1)\left[\sigma\sqrt{T} - \left(d_1 - \sigma\sqrt{T}\right)\right] + \left(\sigma\sqrt{T}\right)^3 A_0 e^{(m-r)T}\ e^{\frac{1}{2}\sigma^2 T} N(d_1)$$

$$= \sigma\sqrt{T}A_0 n(d_1)\left[\sigma\sqrt{T} - \left(d_1 - \sigma\sqrt{T}\right)\right] + \left(\sigma\sqrt{T}\right)^3 A_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2} - r\right)T + \frac{1}{2}\sigma^2 T}\ N(d_1)$$

$$= \sigma\sqrt{T}A_0\left(n(d_1)\left[2\sigma\sqrt{T} - d_1\right] + \sigma^2 T N(d_1)\right) \tag{19}$$

Setelah mendapat nilai I_1, dicari nilai I_2

$$I_2 = e^{-rT}\int_{-d_2}^{\infty}\left(A_0 e^{mT + z\sigma\sqrt{T}} - K\right) He_4(z) n(z)\, dz$$

$$= e^{-rT}\int_{-d_2}^{\infty}\left(A_0 e^{mT + z\sigma\sqrt{T}} - K\right)\frac{d}{dz}\left(\frac{d^3}{dz^3}\right) n(z) dz$$

Dengan cara yang relatif sama seperti mencari nilai I_1, menggunakan integral parsial, diperoleh

$$I_2 = \sigma\sqrt{T}A_0\left[\left(n(d_1)\left({d_1}^2 - 3\sigma\sqrt{T}\left(d_1 - \sigma\sqrt{T}\right) - 1\right)\right) + \left(\sigma\sqrt{T}\right)^3 N(d_1)\right] \tag{20}$$

Sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$E^T_{T_0,GC} = E^T_{T_0} + \frac{\mu_3}{3!} I_1 + \frac{\mu_4 - 3}{4!} I_2 \tag{21}$$

Dengan I_1 dan I_2 mengikuti persamaan (19) dan (20). Selanjutnya dicari formula liabilitas $L^T_{T_0}$ sebagai present value nilai Liabilitas perusahaan waktu T pada saat T_0 pendekatan Gram-Charlier adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} L^T_{T_0,GC} &= A_0 - E^T_{T_0,GC} \\ &= A_0 - \left((A_0[\mathrm{N}(d_1)] - Ke^{-rT}[\mathrm{N}(d_2)]) + \frac{\mu_3}{3!} I_1 + \frac{\mu_4 - 3}{4!} I_2 \right) \\ &= A_0\big(\mathrm{N}(-d_1)\big) + Ke^{-rT}[\mathrm{N}(d_2)] - \frac{\mu_3}{3!} I_1 - \frac{\mu_4 - 3}{4!} I_2 \end{aligned} \tag{22}$$

Setelah diperoleh formula liabilitas perusahaan, selanjutnya dicari formula probabilitas kebangkrutan pada saat jatuh tempo (T_1). Didefinisikan τ = waktu kebangkrutan

$$\tau = \begin{cases} \infty & A_T \geq K \\ T & A_T < K \end{cases}$$

Probabilitas kebangkrutan pada saat T dengan transformasi normal standard $Z = \frac{W_T - 0}{\sqrt{T}}$ sehingga $Z \sim GC(0,1,\mu_3,\mu_4)$ adalah

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\big(A_T < K\big) &= \mathrm{P}\left(A_0 \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \sigma W_T\right\} < K\right) \\ &= \mathrm{P}\left(A_0 \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \sigma Z\sqrt{T}\right\} < K\right) \\ &= \mathrm{P}\left(Z < \frac{\ln\frac{K}{A_0} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{\ln\frac{K}{A_0} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}} g(z)dz \\ &= \int_{-\infty}^{-d_2} n(z)\left\{1 + \frac{\mu_3}{3!}(z^3 - 3z) + \frac{\mu_4 - 3}{4!}(z^4 - 6z^2 + 3)\right\} dz \end{aligned} \tag{22}$$

3. METODE PENELITIAN

3.1. Data dan Sumber Data

Data yang digunakan pada penelitian ini adalah obligasi yang diterbitkan oleh PT. Bank Tabungan Pensiunan Nasional Tbk pada tahun 2017. Obligasi tersebut memperoleh hasil pemeringkatan atas surat hutang jangka panjang dari PT Pemeringkat Efek Indonesia (PEFINDO) dengan peringkat (*rating*) AAA. Obligasi PT Bank Tabungan Pensiunan Nasional Tbk dengan nama "Obligasi III BTPN Tahap II Tahun 2017 Seri B" diterbitkan tanggal 17 Oktober 2017. Data lengkap obligasi diperoleh dari website www.ibpa.co.id. Sedangkan data aset perusahaan diperoleh dari laporan keuangan PT Bank Tabungan Pensiunan Nasional periode Oktober 2012 – September 2017 dari website www.idx.co.id.

3.2 Tahapan Analisis Data

Tahapan analisis untuk memprediksi harga saham dan penghitungan *VaR* PT. BTPN adalah sebagai berikut :

1. Mengumpulkan data harga obligasi PT. BTPN
2. Mengumpulkan data nilai aset perusahaan PT. BTPN .
3. Menghitung nilai *return* saham dengan metode *geometric return*.
4. Menghitung skewness dan kurtosis data return
5. Melakukan uji normalitas data *return* saham
6. Melakukan pemodelan dan analisis valuasi obligasi.
7. Menghitung peluang gagal bayar perusahaan
8. Melakukan simulasi model valuasi obligasi metode Gram-Charlier

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Studi kasus yang digunakan dalam makalah ini adalah obligasi yang diterbitkan oleh PT. Bank Tabungan Pensiunan Nasional Tbk. Obligasi tersebut memperoleh hasil pemeringkatan atas surat hutang jangka panjang dari PT Pemeringkat Efek Indonesia (PEFINDO) dengan peringkat (rating) AAA. Obligasi PT Bank Tabungan Pensiunan Nasional Tbk dengan nama "Obligasi III BTPN Tahap II Tahun 2017 Seri B" diterbitkan tanggal 17 Oktober 2017 dengan hutang pokok (*face value*) sebesar Rp. 900.000.000.000,00 (Sembilan Ratus Milyar Rupiah) berjangka waktu 3 (tiga) tahun dengan tingkat bunga tetap sebesar 7.5% per tahun yang dibayarkan pada saat jatuh tempo.

Untuk mengetahui apakah return aset mengikuti distribusi normal atau tidak, dilakukan uji normalitas *Jarque-Bera* dan nilai *p-value* dari uji *Jarque-Bera* sebesar 0.03892. Dapat dikatakan data return aset tidak berdistribusi normal. Data aset yang digunakan adalah aset perusahaan dari periode Oktober 2012-September 2017. Selanjutnya dihitung moment-moment data seperti tercantum pada Tabel 2.

Tabel 2 Statistik Deskriptif Data Ln Return Aset

Data	PT BTPN
Rata-rata	0.007046655
Variansi	0.0005669758
Standar Deviasi	0.02381125
Harga Terendah	-0.03163991
Harga Tertinggi	0.07507912
Volatilitas	0.0824846
Skewness	0.7675862
Kurtosis	3.533101

Dari Tabel 2 diperoleh nilai skewness 0.767 dan nilai kurtosis 3.533. Kedua nilai tersebut dekat dengan nilai skewness dan kurtosis distribusi normal. Suku bunga bebas risiko yang digunakan adalah BI 7-Day Repo Rate. Rata-rata suku bunga bank bebas risiko dari Oktober 2016 hingga September 2017 adalah 4.681818%. Dengan menggunakan persamaan (3) diperoleh A_0 = Rp. 85.932.429.000.000,00. Berdasarkan data Indeks obligasi pemerintah Indonesia pada tahun 2017 (sesuai dengan tahun penerbitan obligasi), diketahui bahwa tingkat *yield* obligasi dengan waktu jatuh tempo <5 tahun adalah 6.29% pertahun. Harga wajar obligasi dengan tingkat yield 6.29% adalah sebesar Rp. 912.908.452.414,00. Selanjutnya dihitung nilai struktur modal perusahaan yang terdiri dari Ekuitas, Liabilitas dan Peluang kebangkrutan

Tabel 3 Valuasi Obligasi Obligasi III BTPN Tahap II Tahun 2017 Seri B

Nilai	Model *Black-Scholes*	Model *Gram-Charlier*
Ekspektasi Ekuitas	84.880360.000.000.	84.429.920.000.000
Ekspektasi Liabilitas	1.052.073.000.000	1.502.512..000.000
Peluang Gagal Bayar	2.02069×10^{-11}	2.932583×10^{-09}

Berdasarkan Tabel 3, terlihat bahwa peluang kebangkrutan untuk kedua metode sangat kecil. Hal ini menunjukkan bahwa PT BTPN Tbk mempunyai peluang yang besar untuk dapat membayar utangnya pada saat jatuh tempo. Nilai harapan ekuitas pada model dengan asumsi return aset berdistribusi normal (model *Black-Scholes*) lebih tinggi dari nilai harapan ekuitas pada model ekspansi *Gram-Charlier*. Hal ini berkaitan dengan nilai dari harapan liabilitas (hutang) dari kedua model tersebut. Nilai harapan hutang model *Gram-Charlier* lebih tinggi dari nilai harapan hutang model *Black-Scholes*. Sebagai akibatnya nilai peluang *default* model *Gram-Charlier* lebih tinggi dibandingkan dengan peluang *default* model *Black-Scholes*. Selain itu apabila dibandingkan dengan kewajiban yang harus diayar oleh penerbit obligasi pada saat jatuh tempo (K) nilai harapan hutang model *Gram-Charlier* juga lebih besar. Sedangkan nilai harapan hutang model *Black-Scholes* kurang dari nilai K. Hal tersebut menggambarkan bahwa model *Gram-Charlier* lebih tepat untuk memodelkan struktur modal perusahaan.

Selanjutnya disimulasikan peluang gagal bayar obligasi dengan nilai *face value* bervariasi namun pada tingkat kupon dan waktu jatuh tempo yang sama, diperoleh hasil

Tabel 4 Simulasi Valuasi Obligasi : Peluang Gagal Bayar

Face Value (Milyard)	Peluang *Default*	
	Model *Black-Scholes*	Model *Gram-Charlier*
Rp 1.000,00	6.204707×10^{-11}	8.385649×10^{-09}
Rp 10.000,00	0.003099745	0.001710785
Rp 100.000,00	0.3543372	0.643454
Rp 1.000.000,00	9.268163×10^{-05}	0.9939968

Berdasarkan simulasi Tabel 4, terlihat bahwa semakin tinggi nilai *face value* maka semakin tinggi probabilitas gagal bayar perusahaan pada saat jatuh tempo. Akan tetapi pada saat nilai *face value* sangat besar bahkan melebihi nilai aset pada saat waktu nol (A_0), peluang gagal bayar model *Black-Scholes* justru mengecil, hal ini membuktikan bahwa model *Black-Scholes* kurang konsisten untuk kasus di atas. Sementara itu, peluang gagal bayar model *Gram-Charlier* tetap kecil, 9.268163×10^{-05} sesuai kenyataan perusahaan mampu membayar hutangnya dengan baik. Hal ini menunjukkan model *Gram-Charlier* lebih konsisten dalam memodelkan valuasi obligasi dibandingkan dengan model *Black-Scholes*.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan dan studi kasus, dapat diperoleh kesimpulan berikut :

1. Perhitungan valuasi obligasi dengan ekspansi *Gram-Charlier* diperoleh dengan pendekatan polinomial hermite. Valuasi obligasi yang diperoleh adalah valuasi obligasi model *Black-Scholes* ditambah dengan persamaan yang berhubungan dengan moment ketiga dan keempat, yaitu *skewness* dan kurtosis.
2. Model *Gram-Charlier* lebih tepat dalam memodelkan *probability default* dibandingkan dengan model *Black-Scholes* karena hasilnya lebih konsisten untuk berbagai nilai hutang pokok obligasi *(Face Value).*
3. Hasil perhitungan dalam studi kasus meunjukkan bahwa peluang *default* PT BTPN Tbk sangat kecil. Sehingga cukup aman bagi investor untuk menginvestasikan dananya pada obligasi tersebut. Dengan peluang kebangkrutan sebesar 2.932583×10^{-09} maka harga wajar yang harus dibayarkan oleh pemegang obligasi pada saat penandatanganan kontrak adalah sebesar Rp. 912.908.452.414,00. Kemudian PT BTPN Tbk sebagai penerbit obligasi berkewajiban membayarkan sebesar Rp. 900.000.000.000,00 ditambah Rp. 202.500.000.000,00 sebagai kupon kepada pemegang obligasi pada saat jatuh tempo.

DAFTAR PUSTAKA

Abdurakhman, 2017, Portfolio Analysis of Ref Method Based on Mean Variance Optimization of Multi-Objective Model, *Far East Journal of Mathematical Sciences (Indexed by SCOPUS),* Vol. 101(6), 1363 – 1375.

Berberan-Santos, M.N. 2007. Expressing A Probability Density Function in Terms of Another PDF: A Generalized Gram-Charlier Expansion. *Journal of Mathematical Chemistry*, Vol. 42(3), 585 – 594.

Black, F. dan Scholes, M. 1973. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81, 637–654.

Chateau, J. dan Dufresne, D. 2017. Gram-Charlier Processes and Applications to Option Pricing. *Journal of Probability and Statistics*. 2017. 1 – 19.

Jondeau, E. dan Rockinger, M. 2001. Gram-Charlier Densities, *Journal of Economic Dynamics & Control*, 25, 1457 – 1483.

Kendall, M., Stuart, A. dan Ord, J. 1994. *Kendall's Advanced Theory of Statistics*, Vol. 1: Distribution theory. 6^{th} edition. John Wiley & Sons..

Knight, J. dan Satchell, S. 1997. Pricing Derivatives Written on Assets with Arbitrary Skewness and Kurtosis. *Working Paper The Institute for Financial Research*, IFR44. Birkbeck College, University of London..

Maruddani, D.A.I., Rosadi, D., Gunardi, dan Abdurakhman. 2011a. Pengukuran Risiko Kredit Obligasi dengan Model Merton. *Jurnal Ekonomi, Manajemen, dan Akuntansi* (JEMA). Fakultas Ekonomi, UMB Yogyakarta, 1(1), 123–141.

Maruddani, D.A.I., Rosadi, D., Gunardi, dan Abdurakhman. 2011b. *Credit Spreads* Obligasi Korporasi dengan Model Merton. *Prosiding Seminar Nasional Statistika Universitas Diponegoro 2011*, C-18.

Maruddani, D.A.I., Rosadi, D., Gunardi, dan Abdurakhman, 2015, Valuation of One Period Coupon Bond Valuation Based on Default Time and Empirical Study in Indonesian Bond Data, *Far East Journal of Mathematical Sciences (Indexed by SCOPUS)*, 98(1), 57–73.

Merton, R. 1974. On The Pricing Of Corporate Debt: The Risk Structure Of Interest Rate. *Journal of Finance*, 29, 449–470.