DISTRIBUSI RAYLEIGH UNTUK KLAIM AGREGASI

Getut Pramesti
Staf Pengajar FKIP Universitas Sebelas Maret,
Jl. Ir. Sutami 36A Surakarta,

getut@gmail.com

Abstract

An Aggregation of claims are claims the sum of individual claims can be described in a distribution of collective risks that occur in a single period of insurance. Distribution is depicted in a probability density function and cumulative density function. These functions can also describe the characteristics of the distribution through the mean and variance. Writing this paper is to determine the aggregate claims model with a amount individual claims Rayleigh distributed and the number of claims Poisson distributed. Discussion of the results obtained showed that the model's claim depends on the aggregation of individual claims and the number of claims that occurred during the period of insurance.

Keywords: Aggregation, Claim, Rayleigh

1. Pendahuluan

Perusahaan asuransi dalam pengelolaan resiko tentunya harus memperhatikan dengan sungguh-sungguh resiko-resiko yang mungkin muncul selama periode asuransi. Mengapa? Karena perusahaan asuransi sebagai penanggung resiko terjadinya suatu kerugian dari insured tentu harus dapat menanggung kemungkinan-kemungkinan terjadinya klaim dari *insured* kepada *insurer*. Penanggung resiko atau *insurer* harus mengetahui karakter resiko. Karakter resiko inilah dapat dipelajari dalam suatu model distribusi klaim. Distribusi klaim yang dimaksud digambarkan dalam suatu distribusi densitas baik sebagai fungsi densitas probabilitas maupun fungsi densitas kumulatif. Dari fungsi-fungsi inilah, untuk selanjutnya *insurer* dapat menetapkan harga penanggungan resiko dari *insured*. Harga penanggungan ini dimaksudkan untuk menghindari *insurer* dari *loss*.

Terjadinya resiko dalam suatu sistem asuransi dari *insured* dapat memunculkan klaim. Klaim adalah ganti rugi atas suatu resiko kerugian. Apabila resiko tersebut terjadi secara individual maka disebut dengan klaim individual, sedangkan klaim gabungan atas klaim-klaim individual disebut dengan klaim agregasi. Biasanya besar klaim berdistribusi eksponensial atau distribusi lain yang masih keluarga dengan distribusi eksponensial seperti Normal, Poisson, Gamma, Binomial dan Invers Gauss[3]. Beberapa keluarga distribusi eksponensial tersebut juga masuk ke dalam distribusi nilai ekstrim. Distribusi nilai ektrim merupakan distribusi dari suatu variabel random yang mempunyai batasan bernilai minimum maupun maksimum. Distribusi nilai ekstrim banyak juga digunakan sebagai distribusi besar klaim dikarenakan ukuran besar klaim yang dapat cukup besar atau ekstrim. Sehingga permasalahan yang menjadi *interest* pada umumnya adalah mengenai nilai-nilai ekstrim maksimum atau ekstrim minimum. Beberapa jenis distribusi ini antara lain Cauchy, Beta, Weibull, Rayleigh dan sebagainya. Dalam makalah ini akan diuraikan permasalahan mengenai model klaim agregasi dengan distribui Rayleigh yang merupakan turunan dari distribusi Weibull.

Klaim yang muncul setiap terjadi resiko disebut dengan klaim individual, dari klaim individual ini akan membentuk suatu klaim agregasi. Klaim agregasi merupakan akumulasi dari klaim-klaim individual selama suatu periode asuransi tertentu. Perilaku klaim agregasi ini dapat dipelajari dari perilaku besar dan jumlah klaim individunya. Jadi untuk mengetahui pola klaim agregasi terlebih dahulu harus dipelajari pola klaim individunya. Pola klaim individu meliputi dua hal yaitu besar dan jumlah klaim yang terjadi. Untuk mengetahui model agregasi, harus ditentukan model besar dan jumlah klaim individu. Model dari besar dan jumlah klaim individu ini diperoleh dari distribusi masing-masing klaim.

Dalam makalah ini akan diuraikan tentang pembentukan model klaim agregasi dengan besar klaim berdistribusi Rayleigh dan jumlah klaim berdistribusi Poisson. Pembentukan model ditentukan dari bentuk fungsi densitas probabilitas, dari fungsi ini akan diketahui karakteristik distribusi klaim agregasi yaitu dari ukuran rata-rata dan variansinya.

2. Kajian Teoritis

2.1. Sistem Asuransi

Menurut Bowers *et al.* (1997:7) dalam sistem asuransi meliputi beberapa hal, diantaranya adalah 1) Pihak tertanggung atau *insured* merupakan pihak yang mungkin mengalami kerugian (*loss*), 2) Pihak penanggung atau *insurer* dalam hal ini adalah perusahaan asuransi, merupakan pihak yang menanggung resiko *loss* dari insured jika *loss* terjadi, 3) Penanggungan *loss* dari *insured* ke *insurer*, mewajibkan *insured* untuk membayar sejumlah uang yang disebut dengan premi, 4) dari premi inilah *insured* akan menerima polis yaitu perjanjian tertulis yang dapat diajukan klaim-nya apabila terjadi kerugian, 5) Yang dimaksud klaim adalah ganti rugi atas resiko yang terjadi. Suatu klaim individu terjadi disebut dengan klaim individu. Jika klaim individual ke-i dihasilkan oleh polis ke- *i* dimana polis berlaku pada periode asuransi yang sama maka jumlahan dari klaim-klaim ini disebut dengan klaim agregasi. Klaim agregasi ini dapat dipandang berlaku pada suatu periode tunggal asuransi[2].

2.2. Besar Klaim Individu dan Klaim Agregasi

Jika unit resiko individu ke-*i*, *i=1,2,...* dipandang sebagai unit besar klaim individu ke-*i* dan dinotasikan dengan X_i maka $X = \{X_i\}_{i=1,2,\ldots,N}$. X_i yang dapat diasumsikan berdistribusi kontinu maupun diskrit merupakan variabel random berdistribusi identik saling bebas.

Didefinisikan klaim agregasi yang merupakan jumlahan dari *N* klaim individu yaitu[6]:

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i \tag{1}$$

$X_1, X_2, \ldots$ merupakan variabel random yang menyatakan besar klaim individu ke-*i*. X_i dapat berupa diskrit maupun kontinu yang identik dan saling bebas sehingga berlaku :

$$P(X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_n) = P(X_1)P(X_2)\ldots P(X_n)$$

2.3. Jumlah Klaim

Sama seperti halnya dengan *X*, *N* juga merupakan variabel random yang menyatakan jumlah klaim bernilai bulat non negatif. *N* memuat $N_1, N_2, \ldots$ yaitu kejadian dengan jumlah klaim yang mungkin terjadi selama suatu periode asuransi. Jika Ω adalah ruang sampel N, maka

$$\Omega = \bigcup_{k} \{N_i : N(N_i) = n_k, i = 1,2,...\}$$

dengan

$$\sum_{k} P(N = n_k) = 1 \text{ dan } \{N = n_i\} \cap \{N = n_j\} = \emptyset, i \neq j$$

Jumlah klaim *N* merupakan variabel random yang saling bebas, artinya terjadinya polis pada tahun pertama tidak dipengaruhi oleh terjadinya polis pada tahun kedua dan seterusnya. Jumlah klaim yang terjadi selama periode tunggal asuransi tertentu menjadi data yang diperlukan dalam penentuan distribusi jumlah klaim. Jadi untuk mengetahui klaim agregasi yang terjadi, terlebih dahulu harus diketahui besar dan jumlah klaim terlebih dahulu.

3. Pembahasan

Dari persamaan (1) dapat ditentukan fungsi densitas probabilitas dari klaim agregasi yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_S(x) &= P(X_1 + X_2 + \cdots + X_N = x) \\ &= P((\{S = x\} \cap \{N = n_1\}) \cup \cdots \cup (\{S = x\} \cap \{N = n_k\}) \cup \cdots) \end{aligned}$$

Karena $\{S = x\} \cap \{N = n_j\} \bigcap \{S = x\} \cap \{N = n_k\} = \emptyset, j \neq k$ maka berlaku:

$$\begin{aligned} f_S(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} P(\{S = x\} \cap \{N = n_i\}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(\{S = x\} | N = n_i) P(N = n_i) \end{aligned}$$

Untuk suatu *n* klaim berlaku:

$$f_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n = x) P(N = n)$$

Sehingga diperoleh:

$$f_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{*n}(x) P(N = n) \qquad (2)$$

dengan

$$p^{*0}(x) = \begin{cases} 0, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$$

dan $p^{*n}(x) = \sum_{y \leq x} p(y) p^{*(n-1)}(x - y)$

Dengan cara yang sama dalam menentukan fungsi densitas probabilitas, maka akan diperoleh fungsi densitas kumulatif dari klaim agregasinya adalah sebagai berikut:

$$F_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{*n}(x) P(N = n) \qquad (3)$$

dengan

$$P^{*0}(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1, x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{dan } 1 - P^{*n}(x) = \begin{cases} \int_x^{\infty} p^{*n}(y)dy, X \text{ kontinu} \\ \sum_x^{\infty} p^{*n}(y), X \text{ diskrit} \end{cases}$$

Dari persamaan (2) dan (3) dapat diketahui bahwa model klaim agregasi yang dapat dinyatakan dalam suatu distribusi klaim agregasi ditentukan dari distribusi besar dan jumlah klaim individu yang terjadi. Untuk selanjutnya akan ditentukan terlebih dahulu besar rata-rata dan variansi dari klaim agregasi S.

$$\begin{aligned} E[S] &= E[E[S|N=n]] \\ &= \sum_n E[S|N=n]P(N=n) \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh rata-rata klaim agregasi *S* adalah:

$$E[S] = E[X]E[N] \tag{4}$$

$$\begin{aligned} V(S) &= E[E[S^2|N=n]] - (E[S])^2 \\ &= \sum_n \left(nV(X) + n^2(E[X])^2\right)P(N=n) - (E[S])^2 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh variansi klaim agregasi *S*:

$$V(S) = V(X)E[N] + (E[X])^2 V(N) \tag{5}$$

Berdasarkan persamaan (4), dapat diketahui bahwa rata-rata klaim agregasi ditentukan oleh rata-rata besar dan jumlah klaim individu yang terjadi. Begitu pula dengan variansi klaim agregasi, ditentukan oleh variansi besar klaim individu, jumlah klaim individu, rata-rata besar klaim individu dan rata-rata jumlah klaim individu.

Dari sistem asuransi yang telah dipaparkan di atas, untuk mengetahui model klaim agregasi harus ditentukan terlebih dahulu distribusi besar klaim individu dan jumlah klaim. Dalam makalah ini akan diuraikan apabila besar klaim individu berdistribusi Rayleigh dan jumlah klaim berdistribusi Poisson maka akan dicari model distribusi klaim agregasi yang terbentuk. Distribusi Rayleigh merupakan khusus dari distribusi Weibull, sedangkan Weibull merupakan salah satu distribusi nilai ekstrim. Sehingga sebelum membicarakan tentang besar klaim yang berdistribusi Rayleigh terlebih dahulu diulas tentang distribusi nilai ekstrim dan Weibull.

Suatu variabel random dalam sistem asuransi yang penuh dengan *uncertainty*, kadang memunculkan fenomena yang ekstrim. Nilai-nilai ekstrim ini juga merupakan variabel random, dimana distribusinya bergantung pada distribusi variabel random asal variabel ekstrim diperoleh dan juga ukuran sampel. Variabel acak terdistribusi secara identik terbatas ini dinyatakan dalam suatu distribusi nilai ekstrim. Distribusi Nilai ekstrim merupakan peluang kontinu yang membatasi distribusi untuk minimum atau maksimum dari sebuah koleksi yang sangat besar dari pengamatan acak suatu distribusi. Distribusi nilai ekstrim menggunakan tiga parameter yaitu parameter bentuk, parameter skala dan parameter lokasi. Terdapat tiga jenis dari distribusi nilai ekstrim yaitu tipe I, tipe II dan tipe III. Tipe I merupakan variabel random dengan nilai ekstrim maksimum, Tipe II, variabel random nilai ekstrim minimum atau maksimum dan Tipe III, nilai ekstrim minimum. Distribusi Weibull merupakan salah satu contoh dari distribusi nilai ekstrim tipe III. Weibull banyak digunakan dalam keandalan dan statistika karena kemampuannya mendekati berbagai jenis sebaran data. Fungsi densitas probabilitas dari distribusi Weibull adalah:

$$f(x) = \frac{\beta x^{\beta-1}}{\alpha^{\beta}} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right], x \geq 0, \beta > 0, \alpha > 0 \quad (6)$$ [1]

dengan rata-rata

$$E[x] = \int_0^{\infty} x \frac{\beta x^{\beta-1}}{\alpha^{\beta}} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right] dx$$

$$E[x] = \alpha\, \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \quad (7)$$

dimana Γ adalah fungsi Gamma yang didefinisikan

$$\Gamma(\gamma) = \int_0^{\infty} x^{\gamma-1} e^{-x} dx$$

Adapun variansi dari variabel random berdistribusi Weibull adalah sebagai berikut:

$$V(x) = \int_0^{\infty} x^2 \frac{\beta x^{\beta-1}}{\alpha^{\beta}} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right] dx - E^2[x]$$

$$V(x) = \alpha^2 \left\{\Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)\right\} \quad (8)$$

Adapun distribusi Rayleigh merupakan kasus khusus dari distribusi Weibull. Distribusi Rayleigh mempunyai fungsi densitas probabilitas berikut:

$$f(x) = kx \exp\left[-\left(\frac{kx^2}{2}\right)\right] \quad (9)$$

dengan k adalah parameter tunggal yang ekuivalen dengan distribusi Weibull saat $\beta = 2$ dan $k = \frac{2}{\alpha^2}$

Menurut persamaan (7) dan (8) dapat diketahui rata-rata dan variansi variabel random berdistribusi Rayleigh adalah:

$$E[x] = \int_0^{\infty} x\, kx \exp\left[-\left(\frac{kx^2}{2}\right)\right] dx$$

$$E[x] = \sqrt{\frac{2}{k}}\, \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \quad (10)$$

dan

$$V(x) = \int_0^{\infty} x^2 kx \exp\left[-\left(\frac{kx^2}{2}\right)\right] dx - E^2[x]$$

$$V(x) = \frac{2}{k}\left\{\Gamma(2) - \Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)\right\} \quad (11)$$

Jumlah klaim N dalam suatu sistem asuransi merupakan peristiwa stokastik yang merupakan barisan kejadian random yang dapat diprediksikan melalui distribusi jumlah klaim. Distribusi jumlah klaim ini ditentukan melalui fungsi densitas probabilitas dan fungsi densitas kumulatif. Distribusi jumlah klaim individu sangat penting karena menentukan model klaim agregasi yang terbentuk. Distribusi jumlah klaim biasanya digunakan distribusi Poisson, karena Poisson merupakan distribusi untuk kejadian-kejadian yang jarang. Artinya terjadinya resiko dalam suatu selang interval waktu yang singkat atau daerah yang sempit sebanding dengan panjang interval waktu atau luas daerah dan tidak tergantung pada banyak resiko yang terjadi di luar interval waktu atau daerah tersebut. Jika *N* berdistribusi Poisson maka mempunyai fungsi densitas probabilitas[1]:

$$f_N(n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}, \quad \lambda > 0, n = 0,1,2,... \tag{12}$$

Diperoleh rata-rata jumlah klaim berdistribusi Poisson adalah:

$$E[N] = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

Sehingga

$$E[N] = \lambda \tag{13}$$

Variansi jumlah klaim:

$$V(N) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} \lambda^2 + \lambda - E^2[N]$$

Jadi

$$V(N) = \lambda \tag{14}$$

Pada persamaan (13) dan (14) nampak bahwa rata-rata dan variansi jumlah klaim sama dengan parameter dari distribusi jumlah klaim yaitu Poisson. Artinya jumlah klaim yang diasumsikan berdistribusi Poisson, mempunyai ukuran pemusatan terjadinya $N = n$ klaim sama dengan ukuran penyebaran (simpangannya).

3.1. Model Klaim Agregasi

Dari persamaan (1), (2) dan (9) dapat ditentukan fungsi densitas probabilitas dari klaim agregasi dengan besar klaim berdistribusi Rayleigh dan jumlah klaim berdistribusi Poisson adalah sebagai berikut:

$$f_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{*n}(x) \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \tag{15}$$

dengan nilai awal

$$p^{*0}(x) = \begin{cases} 0, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$$

dan $p^{*n}(x) = \sum_{y \leq x} p(y) p^{*(n-1)}(x-y)$

dengan

$$p(y) = ky \exp\left[-\left(\frac{ky^2}{2}\right)\right] \text{ dan } p^{*(n-1)}(x-y) = p(X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1} = x - y)$$

Dengan cara yang sama dalam menentukan fungsi densitas probabilitas, maka akan diperoleh fungsi densitas kumulatif yaitu:

$$F_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{*n}(x) \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \tag{16}$$

dengan nilai awal

$$P^{*0}(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1, x \geq 0 \end{cases}$$

dan

$$1 - P^{*n}(x) = \int_x^\infty p^{*n}(y)\, dy$$

dengan

$$p^{*n}(y) = \sum_{z \leq y} p(z)\, p^{*(n-1)}(y - z),$$

$$p(z) = kz \exp\left[-\left(\frac{kz^2}{2}\right)\right],$$

$$p^{*(n-1)}(y - z) = p\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1} = y - z\right)$$

Menurut persamaan (4), (10) dan (13) dapat ditentukan rata-rata klaim agregasi dengan besar klaim berdistribusi rayleigh dan jumlah klaim berdistribusi poisson adalah sebagai berikut:

$$E[S] = \sqrt{\frac{2}{k}}\, \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\lambda$$

$$E[S] = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\lambda}{\sqrt{k}} \tag{17}$$

Rata-rata besar klaim agregasi dengan besar klaim individu berdistribusi Rayleigh, dari persamaan (17) tergantung dari parameter jumlah klaim yang berdistribusi Poison dan parameter *k* dari distribusi Rayleight.

Berdasarkan persamaan (5), (10), (11), (13) dan (14) diperoleh variansi besar klaim agregasi dengan besar klaim individual berdistribusi Rayleigh dan jumlah klaim berdistribusi Poisson yaitu:

$$V(S) = \frac{2}{k}\left\{\Gamma(2) - \Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)\right\}\lambda + \left(\sqrt{\frac{2}{k}}\, \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right)^2 \lambda$$

$$= \frac{2}{k}\left\{\Gamma(2) - \Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)\right\}\lambda + \left(\frac{2}{k}\, \Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)\right)\lambda$$

Sehingga diperoleh:

$$V(S) = \frac{2}{k} \lambda \Gamma(2) \tag{18}$$

Berdasarkan persamaan (18) nampak bahwa variansi dari klaim agregasi dengan besar klaim individu berdistribusi Rayleigh dan jumlah klaim berdistribusi Poisson tergantung dari *k* dan λ yang merupakan masing-masing parameter dari besar dan jumlah klaim individual.

4. Kesimpulan

Suatu distribusi klaim agregasi merupakan kumpulan dari klaim-klaim individu dalam suatu periode tunggal asuransi. Distribusi klaim agregasi ditentukan dari model klaim agregasi, dimana penentuan model ini diperoleh dari model klaim individual. Model klaim individual ditentukan oleh besar dan jumlah klaim, jadi klaim agregasi tergantung dari besar dan jumlah klaim individu yang terjadi selama periode tunggal asuransi. Jika besar klaim individu berdistribusi Rayleigh dan jumlah klaim berdistribusi Poisson maka akan diperoleh model klaim agregasi dari fungsi densitas probabilitas seperti persamaan (15) dan (16). Dari model tersebut nampak bahwa distribusi klaim agregasi yang merupakan jumlahan dari klaim individu tergantung dari distribusi besar dan jumlah klaim individu yang terjadi selama periode tunggal asuransi tertentu. Meskipun terjadinya klaim individu ke-1, ke-2 dan seterusnya saling tidak mempengaruhi namun distribusi klaim agregasi tergantung dari besar dan jumlah klaim individu. Begitu pula dengan karakteristik klaim agregasi yang dilihat dari ukuran pusat dan penyebarannya seperti persamaan (17) dan (18), nampak bahwa rata-rata dan variansi tergabtung dari parameter masing-masing besar dan jumlah klaim individu yang terjadi.

UCAPAN TERIMA KASIH

Terimakasih kepada semua pihak yang telah membantu terselesaikannya penulisan makalah ini, terutama untuk kakak-kakak almamater S2 UGM yang memberi kesempatan kepada penulis untuk berkarya. Semoga karya kecil ini bermanfaat.

DAFTAR PUSTAKA

1. Bain Lee J dan Engelhard, *Introduction to Probability & Mathematical Statististic*, 2^n ed., Duxbury Press., California, 1992.
2. Bowers *et al*., *Actuarial Mathematics*, 2^n ed., The Society of Actuaries, Schaumburg, Illinois, 1997.
3. Duncan *et al*., *A Practitioner's Guide to Generalized Linear Models*, 3 th ed., 2007, URL: http://www.casact.org/pubs/dpp/dpp04/04dpp1.pdf
4. Getut Pramesti, Model Resiko Kolektif Dalam Asuransi Untuk Periode Tunggal, *Skripsi Universitas Sebelas Maret*, 2001, Tidak dipublikasikan.
5. Getut Pramesti, Dependensi dalam Model Resiko Individual Untuk Asuransi Jiwa Kelompok, *Thesis Universitas Gadjah Mada*, 2003, Tidak dipublikasikan.
6. Waldmann, K.H., On The Exact Calculation of The Aggregate Claims Distribution in The Individual Life Model, *Astin Buletin*, 1994, 24: 89-96.