DISTRIBUSI POISSON DAN DISTRIBUSI EKSPONENSIAL DALAM PROSES STOKASTIK

Sugito[1], Moch Abdul Mukid[1]
[1]Staf Pengajar Program Studi Statistika FMIPA UNDIP

Abstract

In the queueing system, the processes usually come from a Poisson process. In this system should be obtained an arrival distribution and a service distribution. This paper studies about the form of the number of arrival distribution, the number of service distribution, the interarrival distribution and the service time distribution. Futhermore it talks about the relation of them to a Poisson distribution and an exponential distribution.

Keywords: Poisson Process, Poisson Distribution, Eksponential Distribution

1. Pendahuluan

Secara umum pemodelan yang berkembang saat ini bisa dikategorikan dalam dua proses yaitu proses Poisson dan proses deterministik. Pada proses stokastik banyak fenomena di alam yang bisa dibawa ke arah proses Poisson. Proses antrian merupakan contoh nyata proses Poisson yang banyak terjadi pada perbagai fasilitas pelayanan saat ini. Proses antrian merupakan suatu proses yang berhubungan dengan kedatangan pelanggan pada suatu fasilitas pelayanan, menunggu dalam baris antrian jika belum dapat dilayani, dilayani, kemudian seorang pelanggan begitu dilayani hanya akan meninggalkan sarana pelayanan tersebut setelah selesai pelayanan[7]. Bentuk distribusi kedatangan ada dua yaitu distribusi jumlah kedatangan dan distribusi waktu antar kedatangan. Sedangkan bentuk distribusi pelayanan juga ada dua yaitu distribusi jumlah pelayanan dan distribusi waktu pelayanan[3].

Pada proses kedatangan waktu antar kedatangan merupakan distribusi identik dan independen. Proses kedatangan juga merupakan proses renewal. Beberapa distribusi waktu antar kedatangan bisa berdistribusi eksponensial, erlang, general, deterministik atau Poisson[4]. Untuk memperoleh distribusi waktu antar kedatangan beberapa kasus antrian yang terjadi saat ini, seperti panggilan telpon, koneksi server internet, dan lalulintas kendaraan dijalan tol pada arus mudik dan arus balik lebaran serta kedatangan pelanggan dikantor pos pada menjelang tahun baru dan lebaran tidak mudah didapatkan. Hal ini terjadi karena waktu antar kedatangannya yang sangat kecil, sekali sehingga sulit untuk mendapatkan data waktu antar kedatangannya, atau dalam interval waktu kecil, misalkan satu menit jumlah kedatangannya sangat besar. Untuk kasus antrian seperti ini model distribusi yang bisa didapatkan adalah distribusi jumlah kedatangan. Demikian juga untuk mendapatkan data waktu pelayanan, karena terlalu kecil waktu pelayanan antar pelanggan, yang diperoleh adalah data jumlah pelayanan. Sehingga distribusi waktu pelayanan tidak diperoleh, sedangkan yang diperoleh adalah distribusi jumlah pelayanan.

Dalam tulisan ini akan diulas proses dimana jumlah kejadian selama satu interval waktu yang diberikan adalah berdistribusi Poisson. Selain itu juga membicarakan keterkaitan antara distribusi jumlah kejadian yang berdistribusi Poisson baik itu untuk kedatangan maupun pelayanan dengan distribusi waktu antar kedatangan maupun waktu pelayanan.

2. Konsep Dasar

2.1 Distribusi Kedatangan

Distribusi kedatangan para pelanggan biasanya diperhitungkan oleh waktu antar kedatangan, yaitu waktu antara kedatangan dua pelanggan yang berurutan pada suatu fasilitas pelayanan. Distribusi kedatangan ini dapat bergantung pada jumlah pelanggan yang berada dalam sistem ataupun tidak bergantung pada keadaan sistem tersebut. Distribusi ini dapat deterministik (diketahui secara pasti), atau berupa suatu variabel acak yang distribusi peluangnya dianggap telah diketahui.

Bila distribusi kedatangan tidak disebut secara khusus, maka dianggap bahwa pelanggan tiba satu per satu. Asumsinya adalah kedatangan pelanggan mengikuti suatu proses dengan distribusi peluang tertentu. Distribusi peluang yang sering digunakan adalah distribusi Poisson karena kedatangan bersifat bebas dan tidak terpengaruh oleh kedatangan sebelum ataupun sesudahnya. Asumsi dari distribusi peluang Poisson ini adalah kedatangan pelanggan sifatnya acak dan mempunyai rata-rata kedatangan sebesar lamda (λ)[5]. Proses Poisson adalah proses *counting* yang mempunyai batasan tertentu, yaitu diantaranya mengikuti distribusi Poisson dengan rata-rata λt dimana λ suatu konstanta, sehingga pada distribusi Poisson harga rata-ratanya bergantung pada t atau merupakan fungsi t[3].

Beberapa asumsi untuk proses Poisson :

i. Peluang terjadi satu kedatangan antara waktu t dan $t+\Delta t$ adalah sama dengan $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$. Dapat ditulis P{terjadi kedatangan antara t dan $t+\Delta t$ }= $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$, dengan λ adalah suatu konstanta yang independen dari N (t), dengan N(t) merupakan proses *counting*, Δt adalah elemen penambah waktu, dan $o(\Delta t)$ dinotasikan sebagai banyaknya kedatangan yang bisa diabaikan jika dibandingkan dengan Δt, dengan $\Delta t \to o$, dinotasikan: $\lim\limits_{\Delta t \to o} \dfrac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$

ii. P{lebih dari satu kedatangan antara t dan $t + \varDelta t$ } adalah sangat kecil atau bisa dikatakan diabaikan = $o(\Delta t)$.

iii. Jumlah kedatangan pada interval yang berturutan adalah tetap dan independen, yang berarti bahwa proses mempunyai penambahan bebas, yaitu jumlah kejadian yang muncul pada setiap interval waktu tidak tergantung pada interval waktunya.

Distribusi kedatangan terbagi menjadi dua, yaitu: kedatangan secara individu (*single arrivals*), dan kedatangan secara berkelompok (*bulk arrivals*)[5].

2.2 Distribusi Waktu Pelayanan

Bentuk pelayanan ditentukan oleh waktu pelayanan, yaitu waktu yang dibutuhkan untuk melayani pelanggan pada fasilitas pelayanan. Besaran ini bergantung pada jumlah pelanggan yang telah berada di dalam fasilitas pelayanan ataupun tidak bergantung pada keadaan tersebut. Pelayanan dapat dilakukan dengan satu atau lebih fasilitas pelayanan yang masing-masing dapat mempunyai satu atau lebih saluran atau tempat pelayanan yang disebut dengan *server.* Apabila terdapat lebih dari satu fasilitas pelayanan maka pelanggan dapat menerima pelayanan melalui suatu urutan tertentu atau fase tertentu.

Pada suatu fasilitas pelayanan, pelanggan akan masuk dalam suatu tempat pelayanan dan menerima pelayanan secara tuntas dari pelayan (*server*). Bila tidak disebutkan secara khusus, pada bentuk pelayanan ini, maka dianggap bahwa satu pelayan dapat melayani secara tuntas satu pelanggan. Bentuk pelayanan dapat konstan dari waktu ke waktu. Rata-rata pelayanan dapat diberi simbol λ yang merupakan jumlah pelanggan

yang dapat dilayani dalam satuan waktu. Sedangkan rata-rata waktu yang dipergunakan untuk melayani setiap pelanggan diberi simbol 1/µ unit (satuan).
Distribusi waktu pelayanan terbagi menjadi dua komponen penting, yaitu: Pelayanan secara individual *(single service)*, dan pelayanan secara kelompok *(bulk service)*[5].

2.3. Distribusi Poisson

Distribusi ini pertama kali diperkenalkan oleh Siméon-Denis Poisson (1781–1840) dan diterbitkan bersama teori peluangnya, pada tahun 1838 dalam karyanya *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile* ("Penelitian Peluang Hukum Masalah Pidana dan Perdata"). Karyanya memfokuskan peubah acak *N* yang menghitung antara lain jumlah kejadian diskret (kadang juga disebut "kedatangan") yang terjadi selama interval waktu tertentu[2]. Apabila nilai harapan kejadian pada suatu interval adalah λ, maka peluang terjadi peristiwa sebanyak *x* kali adalah

$$f(x;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

dengan

x adalah bilangan bulat non negative dan λ adalah bilangan riil positif.

2.4. Distribusi Eksponensial

Variabel random kontinu X berdistribusi eksponensial dengan parameter $\theta > 0$, jika mempunyai fungsi distribusi dalam bentuk[2]:

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{x/\theta} & , x > 0 \\ 0 & , x \quad yang\ lainnya \end{cases}$$

dengan θ merupakan parameter skala.
Sedangkan fungsi distribusi kumulatifnya adalah:

$$F(X;\theta) = 1 - e^{-x/\theta} \quad , x > 0$$

2.5. Fungsi o(h) dan Proses *Counting*

Fungsi *f* dikatakan fungsi o(h) jika: $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0$

Proses stokastik $\{N(t), t \geq 0\}$ disebut sebagai proses *counting* jika *N(t)* merupakan jumlah total peristiwa yang telah terjadi sampai ke waktu *t*. Proses *counting N(t)* harus memenuhi sifat[6]:

(i). $N(t) \geq 0$

(ii) $N(t)$ adalah bilangan bulat.

(iii) Jika $s < t \quad maka\ N(s) \leq N(t).$

(iv) Untuk $s < t$, $N(t) - N(s)$ sama dengan jumlah peristiwa yang telah terjadi dalam interval (s,*t*].

3. Pembahasan

Akan dibahas secara teoritis proses Poisson yang merupakan proses berdistribusi Poisson pada kedatangan pelanggan dan distribusi waktu antar kedatangannya. Pembahasan akan disajikan pada teorema-teorema berikut.

Teorema 1 :

Untuk suatu proses Poisson, jumlah kedatangan yang terjadi pada interval waktu t adalah variabel random yang mengikuti suatu distribusi Poisson dengan parameter λt dan peluang dari n kedatangan adalah :

$$\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}\ .$$

Bukti :

Misal $P_n(t)$ adalah peluang dari n kedatangan dalam interval waktu t, di mana n = 0, 1, 2, 3, …. Peluang terjadi n kedatangan dapat dinyatakan dengan mengembangkan persamaan diferensial.

Untuk $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} P_n(t+\Delta t) = &\ P\{n \text{ kedatangan pada saat } t \text{ dan tidak ada kedatangan pada } \Delta t\} \\ &+ P\{n\text{-1 kedatangan pada saat } t \text{ dan satu kedatangan pada } \Delta t\} \\ &+ P\{n\text{-2 kedatangan pada saat } t \text{ dan dua kedatangan pada } \Delta t\} + \\ &\ \dots \\ &+ P\{0 \text{ kedatangan dalam } t \text{ dan } n \text{ kedatangan pada } \Delta t\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Dengan menggunakan asumsi i, ii, dan iii, maka persamaan (1) menjadi:

$$\begin{aligned} P_n(t+\Delta t) &= P_n(t)[1-\lambda\Delta t - o(\Delta t)] + P_{n-1}(t)[\lambda\Delta t + o(\Delta t)] + P_{n-2}(t)o(\Delta t) \\ &\quad + \dots + P_0(t)o(\Delta t) \\ &= P_n(t)[1-\lambda\Delta t - o(\Delta t)] + P_{n-1}(t)[\lambda\Delta t + o(\Delta t)] + o(\Delta t) \end{aligned} \quad (2)$$

Karena $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t+\Delta t) = 1$, maka pada saat $n = 0$ diperoleh:

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)[1-\lambda\Delta t - o(\Delta t)] + o(\Delta t) \quad (3)$$

dengan $o(\Delta t)$ menyatakan suku-suku P{n-j kedatangan pada saat t dan j kedatangan pada saat Δt ; $2 \leq j \leq n$}. Persamaan (2) dan (3) ditulis kembali dengan menggabungkan semua bentuk yang memuat $o(\Delta t)$, sehingga didapat:

$$P_0(t+\Delta t) - P_0(t) = -\lambda\Delta t P_0(t) - P_0(t)o(\Delta t) + o(\Delta t)$$

$$P_0(t+\Delta t) - P_0(t) = -\lambda\Delta t P_0(t) + o(\Delta t) \quad (4)$$

dan

$$P_n(t+\Delta t) - P_n(t) = -\lambda\Delta t P_n(t) + \lambda\Delta t P_{n-1}(t) + o(\Delta t),\ (n \geq 1). \quad (5)$$

Persamaan (4) dan (5) dibagi dengan Δt dan diambil limit $\Delta t \to 0$, sehingga diperoleh:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{-\lambda(\Delta t)P_0(t)}{\Delta t} + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right] = -\lambda P_0(t) + \frac{o\Delta(t)}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{P_n(t+\Delta t)-Pn(t)}{\Delta t}\right]=\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{-\lambda(\Delta t)P_n(t)}{\Delta t}+\frac{\lambda(\Delta t)P_{n-1}(t)}{\Delta t}+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right]$$

$$=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}, \qquad (n\geq 1)$$

atau dapat ditulis:

$$\frac{dP_0(t)}{dt}=-\lambda P_0(t) \tag{6}$$

dan

$$\frac{dP_n(t)}{dt}=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t), \quad (\mathrm{n}\geq 1) \tag{7}$$

Dari persamaan (6), untuk n = 0 diperoleh:

$$\frac{dP_0(t)}{dt}=-\lambda P_0(t)$$

$$\frac{dP_0(t)}{P_0(t)}=-\lambda dt$$

$$\ln P_0(t) = -\lambda t$$

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

Dari persamaan (7), untuk n = 1 diperoleh:

$$\frac{dP_1(t)}{dt}=-\lambda P_1(t)+\lambda P_0(t)$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt}+\lambda P_1(t)=\lambda P_0(t)$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt}+\lambda P_1(t)=\lambda e^{-\lambda t}$$

$$e^{\lambda t}\,\frac{dP_1(t)}{dt}+\lambda e^{\lambda t}P_1(t)=\lambda$$

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}P_1(t))=\lambda$$

$$e^{\lambda t}P_1(t)=\int\lambda dt$$

$$P_1(t)=\lambda t e^{-\lambda t}$$

Untuk n = 2 diperoleh:

$$\frac{dP_2(t)}{dt}=-\lambda P_2(t)+\lambda P_1(t)$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt}+\lambda P_2(t)=\lambda P_1(t)$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt}+\lambda P_2(t)=\lambda\lambda t e^{-\lambda t}$$

$$e^{\lambda t}\,\frac{dP_2(t)}{dt}+\lambda e^{\lambda t}P_2(t)=\lambda^2 t$$

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}P_2(t)) = \lambda^2 t$$

$$e^{\lambda t}P_2(t) = \int \lambda^2 t\, dt$$

$$P_2(t) = \frac{1}{2}\lambda^2 t^2 e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda t)^2}{2.1}e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda t)^2}{2!}e^{-\lambda t}$$

Untuk n = 3 diperoleh:

$$\frac{dP_3(t)}{dt} = -\lambda P_3(t) + \lambda P_2(t)$$

$$\frac{dP_3(t)}{dt} + \lambda P_3(t) = \lambda P_2(t)$$

$$\frac{dP_3(t)}{dt} + \lambda P_3(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^2}{2}e^{-\lambda t}$$

$$e^{\lambda t}\frac{dP_3(t)}{dt} + \lambda e^{\lambda t}P_3(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^2}{2}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}P_3(t)) = \frac{1}{2}\lambda^3 t^2$$

$$e^{\lambda t}P_3(t) = \int \frac{1}{2}\lambda^3 t^2\, dt$$

$$e^{\lambda t}P_3(t) = \frac{1}{6}\lambda^3 t^3$$

$$P_3(t) = \frac{1}{6}\lambda^3 t^3 e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda t)^3}{3.2.1}e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda t)^3}{3!}e^{-\lambda t}$$

Sehingga dapat diambil suatu rumus umum, yaitu:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t} \qquad n \geq 0 \tag{8}$$

Jadi, terbukti bahwa peluang dari n kedatangan yang terjadi pada interval waktu t adalah $\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$, dengan jumlah kedatangan yang terjadi pada interval waktu t adalah variabel random yang mengikuti suatu distribusi Poisson dengan parameter λt

Teorema 2:
Jika jumlah kedatangan mengikuti distribusi Poisson maka suatu variabel random waktu antar kedatangan mengikuti distribusi eksponensial.

Bukti :
f (t) = fungsi densitas peluang dari interval waktu t antar pemunculan kejadian yang berurutan, $t \geq 0$.
F (t) = fungsi distribusi kumulatif dari t

Jika suatu variabel random waktu antar dua kedatangan berurutan dimisalkan T, maka

P {T > t}= P {tidak ada kedatangan dalam waktu t} = $\int_T^{\infty} f(t)dt = P_0(t) = e^{-\lambda t}$

atau menggunakan F(t) sebagai fungsi distribusi kumulatif dari T diperoleh:

$$F(t) = P\{T \le t\} = 1 - P(T > t) = 1 - e^{-\lambda t} \tag{9}$$

maka fungsi densitasnya adalah

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t} \tag{10}$$

yang merupakan fungsi densitas dari distribusi eksponensial.
Dengan parameter λ maka fungsi pembangkit momennya diperoleh rata-rata, yaitu:

$$M_T(x) = E\left(e^{tx}\right) = \begin{cases} \int_0^\infty e^{tx} f(t)\,dt; t kontinu \\ \sum e^{tx} f(t); t diskrit \end{cases}$$

$$M_T(x) = \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda t} dt = \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda - x)t} dt = \left. \frac{-\lambda e^{-(\lambda - x)t}}{\lambda - x} \right]_0^\infty = \frac{\lambda}{\lambda - x}$$

$$M_T^{'}(x) = \frac{\lambda}{(\lambda - x)^2} \quad \text{dan} \quad M_T^{''}(x) = \frac{2\lambda}{(\lambda - x)^3}$$

E(T) diperoleh dari:

$$E(T) = M_T^{'}(0) = \frac{\lambda}{(\lambda - 0)^2} = \frac{1}{\lambda}$$

$$E(T^2) = M_T^{''}(0) = \frac{2\lambda}{(\lambda - 0)^3} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Sehingga

$$Var(T) = E(T^2) - (E(T))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \text{ dan } E(T) = \frac{1}{\lambda}$$

Jadi, waktu antar kedatangan yang berurutan mengikuti distribusi eksponensial dengan rata-rata $\frac{1}{\lambda}$. Jika waktu antar kedatangan $\frac{1}{\lambda}$ maka jumlah kejadian dalam satu periode waktu tertentu pastilah berdistribusi Poisson dengan rata-rata kedatangan adalah λ.

4. Kesimpulan

Dari pembahasan diperoleh solusi untuk distribusi jumlah kedatangan pada proses antrian yaitu berdistribusi Poisson. Keterkaitan jumlah kedatangan waktu antar kedatangan adalah sebagai berikut:

a. Untuk suatu proses Poisson, jumlah kedatangan yang terjadi pada interval waktu t adalah variabel random yang mengikuti suatu distribusi Poisson dengan parameter λt dan peluang dari n kedatangan adalah : $\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$

b. Jika jumlah kedatangan mengikuti distribusi Poisson maka suatu variabel random waktu antar kedatangan mengikuti distribusi eksponensial.

DAFTAR PUSTAKA

1. Aminudin, *Prinsip-Prinsip Riset Operasi*, Erlangga, Jakarta, 2005.
2. Bain, L. J. and Engelhardt, M., *Introduction To Probability And Mathematical Statistics,* Duxbury Press, United States of Amirica, 1992.
3. Gross, D and Haris, C. M., *Fundamental of Queueing Theory* : Third edition. John Willey & Sons, Inc., New York, 1998.
4. Kulkarni, V.G., *Modeling, Analysis, Design, and Control of Stochastic Systems,* Springer- Verlag, New York, 1999.
5. Kakiay, T. J., *Dasar Teori Antrian Untuk Kehidupan Nyata*, Yogyakarta : Andi, 2004.
6. Ross, S.M., *Stochastic Processes*, John Wiley & Sons, Inc., Canada, 1983.
7. Taha, H. A., *Riset Operasi :* Jilid 2, Binarupa Aksara, Jakarta, 2004.