CREDIT SPREADS PADA REDUCED-FORM MODEL

Di Asih I Maruddani[1], Dedi Rosadi[2], Gunardi[2], Abdurakhman[2]
[1]Staf Pengajar Program Studi Statistika FMIPA UNDIP
[2]Staf Pengajar Program S3 Matematika FMIPA UGM

Abstract

There are two primary types of models in the literature that attempt to describe default processes for debt obligations and other defaultable financial instruments, usually referred to as structural and reduced-form (or intensity) models. Structural models use the evolution of firms' structural variables, such as asset and debt values, to determine the time of default. Reduced form models do not consider the relation between default and firm value in an explicit manner. Reduced form models assume that the modeler has the same information set as the market - incomplete knowledge of the firm's condition. that leads to an inaccessible default time. The key distinction between structural and reduced form models is not whether the default time is predictable or inaccessible, but whether the information set is observed by the market or not. Consequently, for pricing and hedging, reduced form models are the preferred methodology. Credit spreads are used to measure credit premium, which compensates risk-averse investors for assuming credit risk. Therefore, the credit spreads should remain positive. The higher credit risk assumed by the investors, the higher credit premium got be payed by them. In this paper, we have to to determine the credit spreads of reduced-form model.

Keywords: Reduced-Form Model, Hazard Rate, Credit Spreads

1. Pendahuluan

Terdapat dua pendekatan utama dalam memodelkan risiko kebangkrutan (*default risk*) suatu perusahaan. Model pertama adalah Model Struktural (*Structural Model*) yang diawali oleh Merton (1974). Merton membuat model risiko kebangkrutan suatu perusahaan dengan memodifikasi pemodelan opsi model Black-Scholes (1973). Model Merton selanjutnya dikembangkan oleh Black and Cox (1976), Longstaff and Schwartz (1995), Leland (1994) dan lain-lain. Pada model ini, perusahaan diasumsikan bangkrut ketika nilai aset perusahaan berada di bawah batas kritis tertentu pada saat jatuh tempo. Sehingga kebangkrutan adalah sesuatu yang dapat diprediksikan (*predictable default* time) dengan memperhatikan pergerakan nilai aset perusahaan.

Model kedua adalah Model Tereduksi (*Reduced-Form Model*) yang dikenalkan oleh Artzner dan Delbaen (1995), Jarrow dan Turnbull (1995), Duffie dan Singleton (1999), dan lain-lain. Pada *Reduced-Form Model*, hubungan antara kebangkrutan perusahaan dengan nilai aset tidak dimodelkan secara eksplisit. Peristiwa kebangkrutan dapat diduga dengan memperhatikan perubahan rating perusahaan. Sehingga proses kebangkruta dimodelkan sebagai *Stopped Poisson Process* atau *Stopped Cox Process* dengan intensitas h_t, yang disebut dengan hazard rate.

Pada Model Struktural diasumsikan pembuat model mempunyai himpunan informasi yang sama dengan manajer perusahaan, yaitu informasi mengenai aset dan liabilitas. Sedangkan pada Model Tereduksi (*Reduced Form Model*) diasumsikan pembuat model mempunyai informasi yang sama dengan pasar (*market*). Sehingga informasi dari perusahaan tidak lengkap, dan waktu kebangkrutan adalah *inaccessible default time*.

Perbedaan penting antara Structural Model dan Reduced Form Model bukanlah terletak pada waktu kebangkrutan yang bersifat *predictable* atau *inaccessible*, akan tetapi terletak pada himpunan informasi yang dimiliki pembuat model. Pada Structural Model, himpunan informasi yang dimiliki harus lengkap an sama dengan informasi perusahaan, sedangkan himpunan informasi yang dimiliki pada Reduced Form Model adalah informasi yang diperoleh di pasar (*market*). Sehingga untuk keperluan *pricing* dan *hedging*, metode yang lebih tepat adalah Reduced Form Model [11].

Credit spreads atau *default spreads* atau *yield spreads* adalah premium yang diberikan untuk mengkompensasi risiko yang ditanggung oleh pemegang obligasi. *Spreads* ini merupakan risiko yang ditolerir oleh investor atas pembelian obliasi yang diterbitkan oleh suatu perusahaan. Di pasar obligasi, *credit spreads* biasanya dihitung berdasarkan selisih antara *yield* obligasi korporasi dengan *yield* obligasi pemerintah. Secara empiris diasumsikan obligasi yang diterbitkan oleh pemerintah (*Government Bond*) adalah obligasi bebas risiko sedangkan obligasi yang diterbitkan oleh perusahaan (*Corporate Bond*) adalah obligasi berisiko.

Pada model struktural, perubahan dari nilai aset perusahaan diasumsikan mengikuti proses difusi. Di bawah asumsi proses difusi, tidak memungkinkan terjadinya kebangkrutan perusahaan secara tiba-tiba, sehingga nilai *credit spreads* akan sangat besar, terutama pada waktu jatuh tempo yang pendek (*short maturity*) [7][12]. Oleh karena itu, tujuan penulisan artikel ini adalah pengukuran *credit spreads* pada model tereduksi (*Reduced Form Model*).

2. Dasar Teori

2.1 Model Tereduksi (*Reduced Form Model*)

Reduced Form Model atau *Intensity Based Approach* dikenalkan oleh Jarrow & Turnbull (1992), Artzner & Delbaen (1995), Jarrow & Turnbull (1995), dan Duffie & Singleton (1999). Pada model ini, keadaan (*state*) perusahaan, yaitu bertahan atau bangkrut, dipandang sebagai suatu *jump process* atau proses lompatan, dengan τ adalah waktu lompatan pertama [6]. Ide dasar dari model ini adalah proses gagal diasumsikan mengikuti *Stopped Poisson Process* [8].

Definisi 1. *Counting Process*

Misalkan $(T_n)_{n \geq 0}$ adalah barisan variabel random naik, sedemikian hingga $T_0 = 0$. Suatu Proses Stokastik $(N_t)_{t \geq 0}$ adalah *Counting Process* yang bersesuaian dengan barisan $(T_n)_{n \geq 0}$ jika

$$\begin{cases} N_t = n & \text{jika} \quad t \in [T_n, T_{n+1}] \\ N_t = \infty & \text{jika} \quad t \geq \lim\limits_{n \to \infty} T_n \end{cases}$$

Jika $\lim_{n\to\infty} T_n = \infty$ maka $(N_t)_{t \geq 0}$ disebut *non explosive*

Definisi 2. Intensitas suatu *Counting Process*

Misalkan $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ adalah *non-negative predictable process* sedemikian hingga $\int_0^t \lambda s\, ds < \infty$ a.s. untuk semua *t*.

Misalkan $(N_t)_{t \geq 0}$ adalah sebuah *counting process*. Jika $\left(N_t - \int_0^t \lambda s\, ds\right)_{t \geq 0}$ adalah suatu proses martingale lokal, maka $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ disebut intensitas dari $(N_t)_{t \geq 0}$.

Definisi 3. Intensitas suatu *Stopping Time*
Misalkan $(N_t)_{t \geq 0}$ adalah suatu *counting process non-explosive* dengan intensitas $(\lambda_t)_{t \geq 0}$, dan misalkan $\tau :=$ inf {t : N_t = 1}. Maka akan dikatakan bahwa *stopping time* τ mempunyai intensitas $(\lambda_t)_{t \geq 0}$.

Definisi 4. *Poisson Process*
Suatu *counting process* $(N_t)_{t \geq 0}$ adalah Proses Poisson jika

1. $\forall\, s, t, 0 \leq s \leq t < \infty, N_t - N_s$ adalah independen dari $\mathcal{G}_\int := (\{N_u : u \leq s\})$, yaitu histori proses sampai dengan waktu *s* (*independent increment*).
2. $\forall\, s, t, u, v, 0 \leq s \leq t < \infty, 0 \leq u \leq v < \infty$, dan $v - u = t - s$ dipunyai $N_t - N_s \overset{d}{=} N_v - N_u$ (*stationary increment*)

Misalkan T_1, ..., T_n adalah waktu kedatangan sejumlah peristiwa kebangkrutan. Barisan $\{T_i\}$ adalah Proses Poisson homogen dengan intensitas λ jika waktu antar kedatangan T_{i+1} - T_i berdistribusi eksponensial yang identik dan independen dengan parameter λ.

Secara ekuivalen, misalkan $N(t) = \sum_i 1_{\{T_i \leq t\}}$ adalah jumlah waktu kedatangan pada interval [0,*t*], $N(t)$ untuk t ≥ 0 adalah Proses Poisson homogen dengan intensitas λ jika kenaikan $N(t)$ - $N(s)$ berdistribusi Poisson yang independen dengan parameter λ (*t* - *s*) untuk $s < t$, yaitu

$$P[N(t) - N(s) = k] = \frac{1}{k!}\big(\lambda(t-s)\big)^k e^{-\lambda(t-s)}$$

Andaikan λ adalah konstanta, dengan Reduced Form Approach, dibentuk waktu gagal sebagai lompatan pertama pada Proses Poisson $N(t)$. Sehingga waktu gagal λ berdistribusi eksponensial dengan parameter λ dan probabilitas kegagalan dapat ditulis dengan

$$F(t) = P[\tau \leq t] = 1 - e^{\lambda t}$$

Intensitas dari tingkat kedatangan kegagalan bersyarat dengan syarat tidak ada kegagalan sampai dengan waktu *t*, adalah

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} P[\tau \in (t, t+h] | \tau > t] = \lambda$$

Pada teori probabilitas, λ disebut dengan tingkat hazard yaitu densitas *f* (*t*) pada probabilitas survival

$$\lambda = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

Probabilitas survival didefinisikan dengan $S(t) = 1 - F(t)$. Andaikan $\lambda = \lambda(t)$ adalah fungsi deterministik dari waktu *t*, maka $N(t)$ adalah Proses Poisson non homogen dengan fungsi intensitas λ. Maka probabilitas kegagalan adalah

$$F(t) = 1 - e^{-\int_0^T \lambda(u) du}$$

Secara empiris digunakan model intensitas parametrik

$$\lambda(l) = h_i \quad l \in [T_{i-1}, T_i) \quad i = 1,2, ...$$

untuk konstanta h_i dan T_i yang dapat dikalibrasi dari data pasar.

Secara umum, tingkat hazard λ tidak konstan seperti fungsi deterministik, tetapi merupakan sebuah variabel stokastik. Pada kasus ini, Proses Poisson disebut dengan *Doubly Stochastic* atau *Cox Process* dengan parameter λ_t yang stokastik, dengan syarat realisasi dari λ_t ini akan menjadi Poisson inhomogen.

2.2 *Credit Spreads*

Pada teori tingkat suku bunga, digunakan $P(t,T)$ sebagai notasi harga Obligasi Bebas Risiko Berkupon Nol (*Default-Free Zero Coupon Bond*) yang membayar $1 pada saat jatuh tempo T. Sedangkan $P_j(t,T)$ adalah harga Obligasi Berisiko Berkupon Nol (*Defaultable Zero-Coupon Bond*) yang dikeluarkan oleh perusahaan j saat jatuh tempo dengan syarat tidak terjadi kebangkrutan [16].

Definisi 1

Default-Free Yield didefinisikan dengan :

$$Y(t,T) = -\frac{\ln P(t,T)}{T-t}$$

Definisi 2

Defaultable Yield didefinisikan dengan :

$$Y_j(t,T) = -\frac{\ln P_j(t,T)}{T-t}$$

Definisi 3

Credit Yield Spreads $S_j(t,T)$ untuk obligasi berisiko $P_j(t,T)$ didefinisikan sebagai selisih antara *Default-Free Yield Spreads* dengan *Defaultable Yield Spreads*, yaitu :

$$S_j(t,T) = Y_j(t,T) - Y(t,T) = -\frac{1}{T-t}\ln\frac{P_j(t,T)}{P(t,T)}$$

Struktur *Credit Yield Spreads* atau sering disingkat dengan *Credit Spreads* $S_j(t,T)$ adalah fungsi dari T untuk nilai tertentu t. Struktur *Credit Spreads* cenderung naik dengan bertambahnya waktu jatuh tempo yang menggambarkan bahwa ketidakpastian akan lebih besar pada waktu jangka panjang daripada jangka pendek.

3. *Credit Spreads* pada Model Tereduksi

Kunci utama pada model tereduksi adalah bahwa pembuat model memiliki nilai observasi yang dibangkitkan oleh waktu kebangkrutan τ dan suatu vektor dari variabel *state* X_t, dengan waktu kebangkrutan adalah suatu *stopping time* yang dibangkitkan oleh *Cox Process* $N_t = 1_{\{r \geq t\}}$ dengan suatu intensitas proses λ_t yang tergantung kepada vektor dari variabel *state* X_t (diasumsikan mengikuti proses difusi).

Misalkan $P(t,T)$ adalah harga *zero coupon bond* bebas risiko pada waktu t, yang membayar 1 dollar pada saat jatuh tempo T, dengan $0 \leq t \leq T < \infty$. Sedangkan $V(t,T)$ adalah adalah harga *zero coupon bond* berisiko pada waktu t, yang membayar 1 dollar pada saat jatuh tempo T. Sedangkan $r(t,T)$ dan $R(t,T)$ masing-masing adalah nilai *Yield to Maturity* (YTM) pada obligasi bebas risiko dan obligasi berisiko. Harga obligasi dapat dirumuskan dengan

$$P[t,T] = exp[-r(t,T)(T-t)]$$

dan

$$V[t,T] = exp[-R(t,T)(T-t)]$$

Maka nilai uang yang diakumulasikan sejak waktu ke-0 sampai dengan *t* didefinisikan dengan

$$B(t) = exp\left[\int_0^t r(s)\, ds\right]$$

Dengan *r*(*s*) adalah *spot rate* pada waktu ke-*s*.

Berdasarkan Jarrow & Turnbull (1995) dan Jarrow, Lando, & Turnbull (1997), harga obligasi bebas risiko (obligasi pemerintah) pada model tereduksi adalah:

$$P(t,T) = E\left[\frac{B(t)}{B(T)}\right] = E\left[\exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right)\right]$$

Sedangkan harga obligasi berisiko (obligasi perusahaan) adalah:

$$V(t,T) = E\left[\frac{B(t)}{B(T)}\left[\delta(\tau_t)1_{\{\tau_t<T\}} + 1_{\{\tau_t \geq D\}}\right]\right]$$

Jika *default-free spot rates* dan *default process* saling independen, maka harga obligasi berisiko (obligasi perusahaan) adalah:

$$V(t,T) = P(t,T)\left\{1 - E\left[\{1-\delta(\tau_t)\}1_{(\tau_t \leq T)}\right]\right\}$$

Lemma 1 [4]

$$E_t\left[I_{(\tau_t \leq T)}\delta(\tau_t)\right] = P_t\{(\tau_t \leq T)\}E_t[\delta(\tau_t)]$$

Bukti

$$\begin{aligned}
E_t\left[I_{(\tau_t \leq T)}\delta(\tau_t)\right] &= E_t\left\{E_t\left[I_{(\tau_t \leq T)}\delta(\tau_t)\middle|I_{(\tau_t \leq T)}\right]\right\} \\
&= E_t\left[I_{(\tau_t \leq T)}\delta(\tau_t)\middle|I_{(\tau_t \leq T)} = 1\right]P_t\{\tau_t \leq T\} \\
&\quad + E_t\left[I_{(\tau_t \leq T)}\delta(\tau_t)\middle|I_{(\tau_t \leq T)} = 0\right]P_t\{\tau_t > T\} \\
&= E_t[\delta(\tau_t)]P_t\{\tau_t \leq T\} + 0 \times P_t\{\tau_t > T\} \\
&= E_t[\delta(\tau_t)]P_t\{\tau_t \leq T\}
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan Lemma 1, akan diturunkan *yield spreads* atau *credit spreads* yaitu:

$$R(t,T) - r(t,T) = -\frac{1}{T-t}ln\left\{1 - \{1 - E[\delta(\tau_t)]\}P\{\tau_t \leq T\}\right\}$$

$$= -\frac{1}{T-t}ln\{1 - \{1 - E[\delta(\tau_t)]\}_{T-t}\}$$

dengan $E[\delta(\tau_t)]$ adalah rata-rata tingkat pemulihan (*mean recovery rate*) pada jangka waktu jatuh tempo sebesar T.

Perkalian antara *Loss Given Default* (LGD) dan probabilitas *default* adalah

$$\{1 - E[\delta(\tau_t)]\}P\{\tau_t \leq T\} = \frac{P(t,T) - V(t,T)}{P(t,T)}$$

Sedangkan rasio antara harga obligasi berisiko dan harga obligasi bebas risiko adalah:

$$\{1-\{1-E[\delta(\tau_t)]\}P\{\tau_t \le T\}\} = \frac{V(t,T)}{P(t,T)}$$

Oleh karena tingkat suku bunga dan tingkat hazard yang bernilai positif, maka dipastikan bahwa credit spreads selalu bernilai positif. Sifat ini dapat dipenuhi oleh syarat berikut ini[16]:

Untuk nilai tertentu t berlaku:

1. $P(t,T)$ dan $P_j(t,T)$ akan selalu naik dari waktu ke t sampai dengan T.
2. $P_j(t,T)$ selalu lebih kecil daripada $P(t,T)$ untuk nilai T yang sama.
3. $P_2(t,T)$ selalu lebih kecil daripada $P_1(t,T)$ jika perusahaan ke-2 mempunyai nilai *credit spreads* yang lebih tinggi daripada perusahaan ke-1.

PENUTUP

DAFTAR PUSTAKA

1. Artzner, P. and Delbaen, F., Default Risk Insurance and Incomplete Markets, *Mathematical Finance*, 5:3, 1995: 187-195.
2. Black, F. and Cox, J., Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions, *Journal of Finance*, 1976, 31: 351-367.
3. Black, F. and Scholes, M., The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, 1973, 81: 637-654.
4. Chen, C. and Panjer, H., Unifying Discrete Structural Models and Reduced Form Models in Credit Risk using a Jump Diffusion Process, *Insurance: Mathematics and Economics*, 2007, 33: 357-380.
5. Duffie, D. And Singleton, K., Modeling Term Structure of Defaultable Bonds, *Review of Financial Studies*, 1999, 12: 687 – 720.
6. Ferrazzano, V., Affine Models in Credit Risk, *Master's Thesis*, Faculty of Engineering, University of Rome II "Tor Vergata", 2008.
7. Fons, J.S., Using Default Rates to Model the Term Structures of Credit Risk, *Financial Analysts Journal*, 1994: 25-32.
8. Giesecke, K. *Credit Derivatives and Structured Credit Products*, Lecture Notes, Cornell University
9. Jarrow, R.A. dan Turnbull, S.M., Credit Risk: Drawing the Analogy, *Risk Magazine*, 5(9), 1992.
10. Jarrow, R.A. dan Turnbull, S.M., Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk, *The Journal of Finance*, 1995, 50: 53-85.
11. Jarrow, R.A. dan Protter, P., Structural Versus Reduced Form Model : A New Information Based Perspective, *Journal of Investment Management*, 2004, 2:2: 1-10.
12. Jones, E.P, Mason, S.P., and Rosenfeld, E., Contingent Claims Analysis of Corporate Capital Structures: An Emprical Investigation, *Journal of Finance*, 1984, 39: 611-627.
13. Leland, H.E., Corporate Debt Value, Bond Convenants, and Optimal Capital Structure, *Journal of Finance*, 1994, 49: 1213-1252.
14. Longstaff, F. and Scwhartz, E., A Simple Approach to Valuing Risky Fixed and Floating Rate Debt, *Journal of Finance*, 1995, 50: 789-819.
15. Merton, R., On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rate *Journal of Finance*, 1974, 29: 449–470.

16. Yi, C., Credit Risk From Theory to Application, *Thesis*, McMaster University, Hamilton, Ontario, 2005.