Media Statistika

p-ISSN 1979 – 3693 e-ISSN 2477 – 0647
MEDIA STATISTIKA 13(1) 2020: 60-67
http://ejournal.undip.ac.id/index.php/media_statistika

PERSAMAAN DIFERENSIAL ORNSTEIN-UHLENBECK DALAM PERAMALAN HARGA SAHAM

Amam Taufiq Hidayat, Subanar
Departemen Matematika, FMIPA Universitas Gadjah Mada

e-mail: amamtaufiq8@gmail.com

DOI: 10.14710/medstat.13.1.60-67

Article Info:
Received: 13 January 2020
Accepted: 22 June 2020
Available Online: 26 June 2020

Keywords:
Levy Process, Ornstein-Uhlenbeck process, BNS Gamma Ornstein Uhlenbeck Model
.

Abstract: Geometric Brownian motion is one of the most widely used stock price model. One of the assumptions that is filled with stock return volatility is constant. Gamma Ornstein-Uhlenbeck process a model to describe volatility in finance. Additionally, Gamma Ornstein-Uhlenbeck process driven by Background Driving Levy Process (BDLP) compound Poisson process and the marginal law of volatility follows a Gamma distribution. Barndorff-Nielsen and Shepard (BNS) Gamma Ornstein-Uhlenbeck model can to sample the process for the stock price with volatility follows Gamma Ornstein-Uhlenbeck process. Based on these, the simulation result are compared BNS Gamma Ornstein-Uhlenbeck model with geometric Brown motion for Standard and Poor (SP) 500 stock data. Simulation result give BNS Gamma Ornstein-Uhlenbeck model and Geometric Brownian motion a Root Mean Square Error (RMSE) are 0,13 and 0,24 respectively. These result indicate that the BNS Gamma Ornstein-Uhlenbeck model gives a more accurate than Geometric Brownian motion

1. PENDAHULUAN

Investasi adalah penanaman modal untuk satu atau lebih aset yang dimiliki dalam jangka waktu tertentu dengan harapan mendapatkan keuntungan di masa yang akan datang. Diharapkan melalui investasi, didapatkan nilai lebih terhadap aset yang dimiliki di kemudian hari. Investasi dapat dilakukan salah satunya pada aset keuangan. Investasi pada aset keuangan merupakan komitmen mengikatkan aset pada surat-surat berharga yang diterbitkan oleh pemiliknya. Surat-surat berharga tersebut meliputi deposito jangka panjang, saham, opsi dan lain sebagainya yang diperdagangkan di pasar modal.

Saham merupakan surat bukti kepemilikan atas aset-aset perusahaan yang menerbitkan saham. Saham memberikan bukti kepemilikan atas perusahaan sehingga para pemegang saham berhak menentukan arah kebijakan perusahaan melalui rapat umum pemegang saham. Sebaliknya, pemegang saham juga turut menanggung risiko sebesar proporsional dengan besarnya saham yang dimiliki apabila perusahaan mengalami kerugian. Derajat kepemilikan saham salah satunya tercermin dari sedikit banyaknya lembar saham yang dimiliki. Perubahan harga saham dari waktu ke waktu sangat berpengaruh bagi para pemegang saham. Realisasinya harga saham berfluktuasi dari waktu ke waktu (Devolder *et al.*, 2015; Rosadi, 2016; dan Ross, 2010). Oleh karena itu diperlukan model matematis terkait harga saham untuk meramalkan harga saham untuk meminimumkan risiko di masa yang akan datang. Karena itu banyak model matematis ditawarkan untuk dapat memberikan gambaran kepada investor terkait perilaku harga saham yang diperdagangkan di pasar modal. Diharapkan melalui model matematis tersebut investor dapat melakukan keputusan terbaik terkait aset yang diinvestasikan di pasar modal.

Bachelier (1900) memodelkan harga saham mengikuti gerak Brown dengan drift. Namun model tersebut dianggap kurang realistis karena ia memungkinan harga saham bernilai negatif. Berdasarkan hal tersebut, memotivasi model yang lebih tepat dikenalkan, yaitu pemodelan dengan berdasarkan pada gerak Brown geometrik, yang merupakan eksponensial dari gerak Bown (Samuelson, 1965). Salah satu pemodelan harga saham yang banyak digunakan adalah model gerak Brown geometrik (Ornstein & Uhlenbeck, 1930). Asumsi yang harus dipenuhi pemodelan tersebut adalah nilai return harus berdistribusi normal dengan nilai mean dan volatilitas return saham bernilai konstan. Banyak penelitian dilakukan terkait pemodelan harga saham, terkait penelitian tersebut ditunjukan bahwa dimungkinkan nilai volatilitas berubah seiring waktu (Graf, 2007). Selama bertahun-tahun beberapa model telah dikembangkan dalam upaya memberikan gambaran yang lebih realistis tentang perilaku harga saham.

Model Barndorff-Nielsen Shepard (BNS) merupakan model matematis yang dapat digunakan untuk menggambarkan prediksi pergerakan suatu proses stokastik (Barndorff-Nielsen *et al.*, 2001), salah satunya pergerakan harga saham dengan volatilitas juga mengikuti suatu proses stokastik. Pada penelitian ini akan dibahas model matematis harga saham yang dikembangkan dari model gerak Brown geometrik dengan menganggap nilai volatilitas mengikuti proses stokastik.

Proses Gamma Ornstein-Uhlenbeck merupakan proses stokastik yang dapat menggambarkan return volatilitas pergerakan harga saham (Mariani & Tweneboah, 2013; Mariani, *et al.*, 2016). Lebih lanjut, proses tersebut mengikuti *Background Driving Levy Process* (BDLP) *compound Poisson process* (Habtimicael & Sengupta, 2014). Lebih lanjut distribusi marginal dari proses tersebut mengikuti distribusi Gamma (Habtimicael & Sengupta, 2014; Mariani, 2013) . Estimasi parameter pada proses Gamma Ornstein-Uhlenbeck diacu dari Shouten (2003), Spiliopoulus (2009), dan Valdivieso *et al.* (2006).

Model Barndorff-Nielsen Shepard (BNS) Gamma Ornstein-Uhlenbeck merupakan model matematis yang dikembangkan untuk menggambarkan prediksi pergerakan harga saham dengan dengan volatilitas mengikuti proses Gamma Ornstein-Uhlenbeck. Simulasi Model BNS Gamma Ornstein-Uhlenbeck (Borras, 2017; Kuzmia, 2010; Kuzmia, 2011) dilakukan terhadap data saham SP 500. Selanjutnya dengan data yang sama dilakukan pula simulasi pergerakan harga saham menggunakan model gerak Brown geometrik (Rubinstein & Kroese, 1965). Berdasarkan nilai *Root Mean Square Error* (RMSE) yang diperoleh dari beberapa kali simulasi terhadap data saham SP 500 yang dilakukan, menghasilkan nilai RMSE model BNS Gamma Ornstein-Uhlenbeck lebih kecil dibandingkan dengan nilai RMSE dari model Gerak Brown geometrik, salah satunya yang diperoleh dari suatu simulasi yaitu masing-masing bernilai 0,13 dan 0,24. Jadi dapat dikatakan bahwa model BNS Gamma Ornstein-Uhlenbeck memberikan hasil yang yang lebih akurat dibandingkan dengan model gerak Brown geometrik.

2. TINJAUANPUSTAKA

2.1. Proses Poisson

Definisi 1 *Proses stokastik* $X = \{X(t): t \geq 0\}$ *disebut counting process jika* $X(t)$ *menyatakan banyaknya kejadian pada saat* t.

Definisi 2 *Counting process* $X = \{X(t): t \geq 0\}$ *disebut proses Poisson dengan parameter* a *jika memenuhi:*

1. $X_0 = 0$.
2. *Proses yang mempunyai kenaikan yang saling independen.*
3. *Untuk* $s < t$, *variabel random* $X_t - X_s$ *berdistribusi Poisson dengan parameter* $a(t-s)$.

2.2. Compound Poisson Process

Definisi 3 *Misalkan proses stokastik* $X = \{X(t): t \geq 0\}$ *merupakan proses Poisson dengan parameter* a *dan untuk setiap* $i = 1,2,\dots,n$, $\{Y_i\}$ *menyatakan barisan variabel random dengan distribusi* F *yang juga saling independen dengan* X, *maka*

$$Z = \sum_{i=1}^{X} Y_i$$

disebut compound Poisson process.

Sifat 1 *Jika* $Z = \{Z(t): t \geq 0\}$ *compound Poisson process maka fungsi karakteristik yang berkorespondensi* Z *adalah*

$$\phi_Z(u) = e^{\lambda \int_{\mathbb{R}} (e^{iux}-1)F(dx)}$$

2.3. Proses Levy

Definisi 4 *Proses stokastik* $X = \{X(t): t \geq 0\}$ *disebut proses Levy jika memenuhi:*

1. $X_0 = 0$.
2. *Proses yang mempunyai kenaikan yang saling independen.*
3. *Proses yang mempunyai kenaikan yang stasioner.*
4. *Fungsi cadlag.*
5. *Proses yang kontinu secara stokastik.*

Lebih lanjut, pada kasus dimana grafik realisasi dari proses Levy tidak turun, proses Levy disebut subordinator.

2.4. Proses Ornstein-Uhlenbeck

Definisi 5 *Proses stokastik yang kontinu dan dan non negatif* $X = \{X(t)\}$ *disebut proses Ornstein-Uhlenbeck jika ia termasuk fungsi cadlag dan memenuhi persamaan diferensial stokastik*

$$dX(t) = -\lambda X(t)dt + dZ(\lambda t), X(0) > 0, \text{dan } \lambda \in \mathbb{R}^+ , \tag{1}$$

dengan $Z = \{Z(\lambda t): t \geq 0\}$ menyatakan proses Levy. Proses $Z = \{Z(\lambda t): t \geq 0\}$ selanjutnya dikenal dengan istilah *Background Driving Levy Process* (BDLP) atau subordinator yang berkorespondensi dengan proses $X(t)$.

Lebih lanjut, penyelesaian persamaan (1) adalah:

$$X(t) = e^{-\lambda t}X(0) + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\, dZ(\lambda s) \tag{2}$$

2.5. Self-Decomposability

Pada bagian ini akan dijelaskan pengertian *self-decomposable*. *Self-decomposable* mempunyai keterkaitan dengan proses Ornstein-Uhlenbeck (Bar-Lev, Bshouty dan Leetac (1900), dan Sato (1999)).

Definisi 6 *Variabel random X dikatakan self-decomposable jika terdapat barisan variabel random $\{Z_j : j = 1,2,\dots,n\}$ serta barisan $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ sehingga memenuhi*

$$X \equiv a_n(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n) + b_n \tag{2}$$

Teorema 1 *Jika X Self-decomposable maka terdapat proses stokastik yang stasioner , misalkan $\{X(t): t \geq 0\}$ dan proses Levy $\{Z(t): t \geq 0\}$ sehingga $X(t) \equiv X$ dan*

$$X(t) = e^{-\lambda t}X(0) + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\, dZ(\lambda s) \tag{3}$$

dengan $\lambda > 0$. Sebaliknya, jika $\{X(t): t \geq 0\}$ merupakan proses stokastik yang stasioner dan $\{Z(t): t \geq 0\}$ proses Levy dan memenuhi Persamaan (3) maka X *Self-decomposable*.

2.6. Proses Gamma

Distribusi Gamma dapat dijustifikasi *self-decomposable*. Berdasarkan keterkaitan *self-decomposable* dengan proses Ornstein-Uhlenbeck, maka dipilih distribusi Gamma sebagai distribusi marginal proses Ornstein-Uhlenbeck. Berikut ini diberikan definisi proses Gamma.

Definisi 7 *Proses stokastik $X = \{X(t): t \geq 0\}$ dengan parameter a dan b disebut proses Gamma jika memenuhi:*

1. $X_0 = 0$.
2. *Proses mempunyai kenaikan yang saling independen.*
3. *Proses mempunyai kenaikan yang stasioner.*
4. *Untuk $s < t$, variabel random $X_t - X_s$ berdistribusi $\Gamma(a(t-s), b)$.*

Sifat 2 *Fungsi densitas Levy dari BDLP yang berkorespondensi dengan BDLP proses $\Gamma(a,b)$ Ornstein-Uhlenbeck merupakan compound Poisson process dengan parameter a.*

2.7. Estimasi Parameter Proses Gamma ($\boldsymbol{\Gamma(a,b)}$) Ornstein-Uhlenbeck

Proposisi 1 *Misalkan $Z = \{Z(t): t \geq 0\}$ menyatakan proses Levy sehingga $E(Z(1)) = \mu < \infty$, $Var(Z(1)) = \sigma^2 < \infty$, dan $\int_{|x|>1} e^{vx} F_z(dx) < \infty$, untuk setiap $|v| \leq M$. Jika M konstanta terbesar dan $\lambda < M$ maka :*

1. $E(X(0)) = \mu$.
2. $Var(X(0)) = \frac{\sigma^2}{2}$.

Lebih lanjut, berdasarkan Proposisi 1 dan metode *moment* dapat dipeoleh nilai estimasi untuk parameter a dan b, yaitu:

$$a = \frac{2\mu^2}{\sigma^2} \text{ dan } b = \frac{2\mu}{\sigma^2} \tag{4}$$

Selanjutnya akan ditentukan nilai estimasi parameter λ. Pertama akan diberikan sifat yang menyatakan bahwa $\rho(k) = e^{-\lambda|k|}$, dengan $\rho(k)$ menyatakan fungsi autokorelasi pada lag k yang berdasarkan pada data $x_0, x_1, \dots, x_n$. Tanpa mengurangi keumuman dipilih $k = 1$, sehingga diperoleh bahwa:

$$\lambda = -\log \rho(1) \tag{5}$$

2.8. Model BNS Gamma ($\Gamma(a, b)$) Ornstein-Uhlenbeck

Pada bagian ini akan dibahas model BNS $\Gamma(a, b)$ Ornstein-Uhlenbeck. Model BNS $\Gamma(a, b)$ Ornstein-Uhlenbeck merupakan model pergerakan harga saham yang mengganggap volatilitas mengikuti proses stokastik. Dalam hal ini prosesnya berdasarkan pada proses Levy, dengan BDLP *compound Poisson prosess* dan distribusi marginal Gamma. Berikut ini diberikan model matematis BNS $\Gamma(a, b)$ Ornstein-Uhlenbeck.

$$dX(t) = dlog\, S(t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2(t)\right)dt + \sigma(t)dW(t) \tag{6}$$

$$d\sigma^2(t) = -\lambda\sigma^2(t)dt + dZ(\lambda t)$$

$$X(0) > 0, \text{ dan } X(0) = \log S(0)$$

dengan $\{S(t): t \geq 0\}$ menyatakan proses harga saham, $\{Z(t): t \geq 0\}$ subordinator, $\{\sigma(t): t \geq 0\}$ proses $\Gamma(a, b)$ Ornstein-Uhlenbeck dengan BDLP *compound Poisson prosess*, $\{W(t): t \geq 0\}$ proses Wiener, dan $\lambda > 0$.

Selanjutnya, dengan melakukan diskritisasi model BNS $\Gamma(a, b)$ Ornstein-Uhlenbeck pada Persamaan (6) untuk $t = n\Delta t$, maka diperoleh persamaan seperti di bawah ini:

$$X(n\Delta t) = X\big((n-1)\Delta t\big) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2(n\Delta t)\right)\Delta t + \sigma(n\Delta t)\sqrt{\Delta t}u_n \tag{5}$$

dengan $u_n \sim N(0,1)$.

2.9. Teknik Simulasi Model BNS $\Gamma(a, b)$ Ornstein-Uhlenbeck

Pada bagian ini akan diberikan tahapan simulasi model BNS $\Gamma(a, b)$ Ornstein-Uhlenbeck.

1. Bangkitkan proses Poisson $\{N(t): t \geq 0\}$ dengan parameter $a\lambda$.
2. Bangkitkan bilangan random uniform $u \sim unif(0,1)$.
3. Bangkitkan bilangan random eksponensial $x \sim exp(b)$ dengan $x = -\frac{\log u}{b}$.
4. Bangkitkan nilai-nilai realisasi proses $\Gamma(a, b)$ Ornstein-Uhlenbeck dengan formula
$$X(i\Delta t) = e^{-\lambda\Delta t}X((i-1)\Delta t) + \sum_{j=N((i-1)\Delta t)+1}^{N(i\Delta t)} x_j \ .$$
5. Simulasikan grafik realisasi model BNS $\Gamma(a, b)$ Ornstein-Uhlenbeck menggunakan formula

$$X(n\Delta t) = X\big((n-1)\Delta t\big) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2(n\Delta t)\right)\Delta t + \sigma(n\Delta t)\sqrt{\Delta t}u_n \tag{6}$$

3. METODE PENELITIAN

3.1. Data penelitian

Data penelitian yang digunakan pada penelitian ini merupakan data sekunder data saham Standard and Poor (SP) 500 yang diperoleh dari www.yahoo.finance.com. Data saham yang digunakan merupakan data saham harian periode 18 April 2002 sampai 17 September 2003.

Analisis data untuk model BNS $\Gamma(a,b)$ Ornstein-Uhlenbeck menggunakan bantuan program Python dan progam Excel. Program Python digunakan untuk melakukan simulasi plot proses $\Gamma(a,b)$ Ornstein-Uhlenbeck. Sedangkan program Excel digunakan untuk menghitung nilai RMSE hasil realisasi nilai-nilai harga saham SP 500 hasil simulasi model BNS $\Gamma(a,b)$ Ornstein-Uhlenbeck model gerak Brown geometrik dan model BNS $\Gamma(a,b)$ Ornstein-Uhlenbeck.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1. Estimasi parameter model BNS $\Gamma(a,b)$ Ornstein-Uhlenbeck

Parameter-parameter model BNS $\Gamma(a,b)$ Ornstein-Uhlenbeck dihitung menggunakan formula yang diberikan pada Persamaan (3) dan Persamaan (4) dengan menggunakan program Excel. Berikut ini diberikan ringkasan nilai-nilai parameter dari model BNS $\Gamma(a,b)$ Ornstein-Uhlenbeck.

Tabel 1 Estimasi Parameter Model BNS Gamma Ornstein-Uhlenbeck

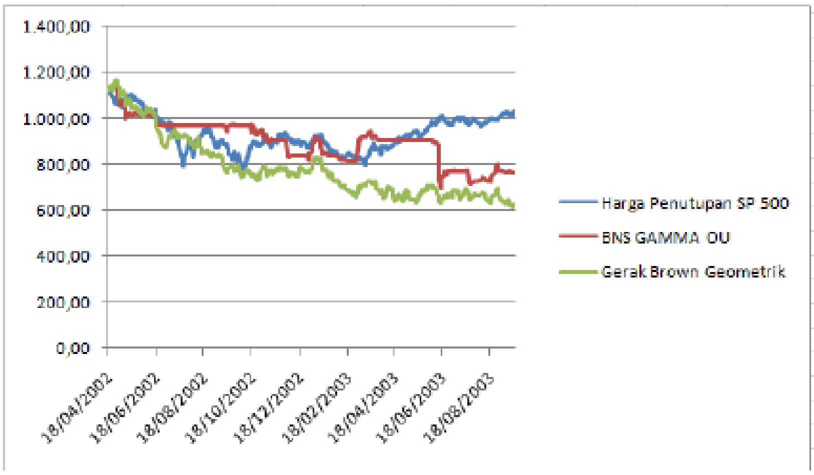
Parameter	λ	a	b	$S(0)$	$\sigma^2(0)$	μ
estimasi	0,578	1,4338	11,6641	1124,47	0,0145	-0,00012

Berdasarkan Tabel 1, selanjutnya akan dilakukan simulasi untuk model BNS $\Gamma(a,b)$ Ornstein-Uhlenbeck menggunakan data saham SP 500 dengan teknik simulasi di atas.

4.2. Simulasi model BNS $\Gamma(a,b)$ Ornstein-Uhlenbeck

Berdasarkan teknik simulasi model BNS $\Gamma(a,b)$ Ornstein-Uhlenbeck, dan nilai parameter pada Tabel 1, dengan menggunakan bantuan program Python diperoleh salah satu hasil simulasi untuk nilai-nilai prediksi harga saham SP 500. Menggunakan data yang sama, dilakukan pula simulasi model gerak Brown geometrik menggunakan teknik simulasi Monte Carlo yang diacu dari Rubinstein (1965) yang dibantu dengan menggunakan program Excel.

Berdasarkan Gambar 1 tampak secara grafis bahwa pendekatan harga saham menggunakan model BNS $\Gamma(a,b)$ Ornstein-Uhlenbeck lebih mendekati harga aktual saham SP 500 dibandingkan dengan pendekatan harga saham menggunakan model gerak Brown geometrik. Selanjutnya secara analitis akan dilakukan perbandingan terhadap dua model tersebut berdasarkan ukuran kebaikan RMSE dari hasil simulasi harga saham yang tergambar pada Gambar 1. Berikut ini diberikan ringkasan hasil perhitungan RMSE hasil simulasi harga saham SP 500 menggunakan kedua model tersebut yang perhitungannya menggunakan program Excel.



Gambar 1 Plot Simulasi Model BNS $\Gamma(a, b)$ Ornstein-Uhlenbeck dan Gerak Brown Geometrik

Tabel 2 Perbandingan Nilai RMSE Model

Model	RMSE
Gerak Brown Geometrik	0,24
BNS $\Gamma(a, b)$ Ornstein-Uhlenbeck	0,13

Berdasarkan Tabel 2 nilai RMSE model BNS $\Gamma(a, b)$ Ornstein-Uhlenbeck lebih kecil dibandingkan dengan nilai RMSE dari model Gerak Brown Geometrik. Hal ini menunjukan model BNS $\Gamma(a, b)$ Ornstein-Uhlenbeck lebih akurat dibandingkan dengan model gerak Brown geometrik.

Berdasarkan perbandingan nilai RMSE dari model BNS $\Gamma(a, b)$ Ornstein-Uhlenbeck dengan model gerak Brown geometrik dari hasil simulasi untuk data saham SP 500 didapatkan bahwa model BNS $\Gamma(a, b)$ Ornstein-Uhlenbeck memberikan nilai pendekatan lebih baik terhadap prediksi harga saham SP 500 periode 18 April 2002 sampai 17 Septermber 2003. Jadi dapat dikatakan bahwa model BNS $\Gamma(a, b)$ Ornstein-Uhlenbeck lebih baik dibandingkan dengan model gerak Brown geometrik.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil simulasi yang dilakukan pada data saham SP 500 didapatkan bahwa model BNS $\Gamma(a, b)$ Ornstein-Uhlenbeck memberikan presisi yang lebih baik dibandingkan dengan model pergerakan harga saham gerak Brown geometrik. Hal tersebut dibuktikan dengan nilai RMSE yang lebih kecil yang digunakan sebagai ukuran kebaikan model. Dengan demikian disimpulkan bahwa model BNS $\Gamma(a, b)$ Ornstein-Uhlenbeck lebih baik dibandingkan dengan model gerak Brown geometrik. Penelitian selanjutnya diharapkan dilakukan pendekatan model BNS dengan volatilitas mengikuti proses stokastik yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

A. Kuzmia. 2010. Gamma process simulation and it’s parameter estimation *Proceedings of the Workshop “Probability Theory, Mathematical Statistics and their Application”*, Belarus 22-25 Februari (2010), hal 179-186.

A. Kuzmia. 2011. Levy processes simulation. *Proceedings of the Workshop* "International Congress on Computer Science: Information System and Technologies (CSIST'2011), Minsk, Belarus 31 Oktober-3 November (2011), hal 86-91.

Bachelier, L. 1900. Theorie De La Speculation, *Annales Scientifiques L'Ecole Normale Superieure*, Vol. 17, hal 21-86.

Bar-Lev, S., Bshouty dan Letac, G. 1992. Natural Exponential Families and Selfdecomposability, *Statistics and Probability Letters*, Vol. 13, hal 205-238.

Barndorff-Nielsen, O., E., Mikossh, T. dan Resnick, S., 2001. *Levy Processes: Theory and Application*. Birkhauser. Boston.

Borras, P. M., 2017. *Simulation and Estimation of Levy Driven Stochastic Process.* Universitat Politecnica de Catalunya. Spanyol.

Devolder, P., Jansen, J. dan Manca, R. 2015. *Basic Stochastic Processes*. New York: John Wiley.

Graf, F. 2007. *Exotic Option Pricing in Stochastic Volatility Levy Models and with Fractional Brownian Motion*. Universitat Konstanz. Konstanz.

Mariani, M. C., I. Florescu, I. Sengupta, M. P. Beccar Varela, P. Bezdek, dan L. Serpa. 2013. Levy models and scale invariance properties applied to Geophysics, *Physica A*, Vol 392, hal 824-839.

Mariani, M. C. dan Teweeboah, O. K. 2016. Stochastic Differential Equations Applied to the Study of Geophysical and Financial Time Series, *Physica A*, Vol. 443, hal 170-178.

Ornstein, L. S. dan Uhlenbeck, G. E. 1930. On The Theory of The Brownian Motion, *Physical Review*, Vol. 36, hal 823-842.

Rosadi, D., 2016. *Analisis Runtun Waktu dan Aplikasinya dengan R*. Gadjah Mada University Press. Yogyakarta.

Ross, S. M., 2010. Introduction to Probability Models. Academic Press. USA.

Rubinstein, R. Y. dan Kroese D. P. 1965. *Simulation and the Monte Carlo Method*. New York: Wiley and Sons.

S. Habtemicael dan I. Sengupta. 2014. Ornstein-Uhlenbeck processes for geophysical data analysis, *Physica A*, Vol. 399, hal 147-156.

Samuelson, P. 1965. Rational Theory of Warrant Pricing, *Industrial Management Review*, Vol. 6, hal 13-32.

Sato, K. 1999. *Levy Process and Infinitely Distribution*. Cambridge: Cambridge University Press.

Schouten, W. 2003. *Levy Process in Finance: Pricing Financial and Derivatives*. New York: John Wiley and Sons.

Spiliopoulus, K. 2009. Method of Estimation of Orstein-Uhlenbeck Processes Driven by General Levy Process, *Ann. I.S.U.P.*, Vol. 53, hal 3-19.

Valdivieso, L., Schouten, W. dan Tuerlinckx, F. 2006. Maximum Likelihood Estimation in Procesess of Ornstein-Uhlenbeck Type, K.U. Lenven, *Technical Report*, Vol. 2006, Issue 3.