# PROSES ANTRIAN DENGAN KEDATANGAN BERDISTRIBUSI POISSON DAN POLA PELAYANAN BERDISTRIBUSI GENERAL

**Sugito[1], Abdul Hoyyi[2]**
[1] Staf Pengajar Jurusan Statistika FSM UNDIP
[2] Staf Pengajar Jurusan Statistika FSM UNDIP

## Abstract

In the queuing process, the distribution testing is performed to obtain the distribution of arrival and service distributions. Customer arrival distribution is obtained based on the number of arrivals or inter-arrival time. Service distribution is obtained based on the number of arrivals or inter-arrival time. In this paper we will discuss the process in queuing with the arrival of the Poisson distribution and the general pattern of service distribution

**Keywords** : Queuing, Arrival Distribution, Service Distribution

## 1. Pendahuluan

Antrian merupakan sesuatu yang biasa kita jumpai di tempat-tempat pelayanan umum, misalnya antrian di stasiun kereta api, antrian di terminal bis, antrian di restoran cepat saji, antrian di kantor pos, antrian di swalayan, dan masih banyak lagi. Hal ini terjadi karena pelanggan yang membutuhkan pelayanan tidak sebanding dengan fasilitas pelayanan yang tersedia. Antrian yang terlalu panjang akan merugikan pelanggan maupun pengelola tempat pelayanan, karena banyak pelanggan yang akan keluar dari antrian dan meninggalkan tempat tersebut. Karena merupakan sesuatu yang wajar apabila kita menginginkan pelayanan yang cepat, sehingga sedapat mungkin menghindari antrian. Kalaupun mengantri, hanya memerlukan waktu tunggu sesingkat mungkin.

Situasi antrian juga merupakan bagian dari keadaan yang terjadi dalam rangkaian kegiatan operasional yang bersifat random dalam suatu fasilitas layanan. Pengguna fasilitas atau pelanggan datang dengan waktu yang acak, tidak teratur dan tidak dapat segera dilayani sehingga mereka harus menunggu cukup lama. Oleh karena itu, penyedia layanan diharapkan dapat memberikan pelayanan dengan baik kepada pelanggannya agar para pelanggan tidak harus menunggu cukup lama untuk memperoleh pelayanan.

Untuk mempertahankan pelanggan, sebuah sistem selalu berusaha untuk memberikan pelayanan yang terbaik. Pelayanan yang terbaik tersebut diantaranya adalah memberikan pelayanan yang cepat sehingga pelanggan tidak dibiarkan menunggu terlalu lama. Dalam mengurangi waktu tunggu tambahan fasilitas pelayanan dapat diberikan untuk mengurangi antrian atau menghindari antrian yang terus membesar. Untuk memberikan tambahan fasilitas pelayanan maka sistem akan mengeluarkan biaya tambahan yang akan menimbulkan pengurangan keuntungan, dan mungkin sampai di bawah tingkat yang dapat diterima. Sebaliknya, sering timbulnya antrian yang panjang akan mengakibatkan hilangnya pelanggan atau nasabah.

Pada tulisan ini akan dibahas proses antrian dengan kedatangan berdistribusi poisson dan pola pelayanan berdistribusi umum. Meliputi Proses antrian dengan kedatangan berdistribusi poisson dan pola pelayanan berdistribusi umum untuk pelayanan tunggal dan pelayanan lebih dari satu (majemuk).

## 2. Tinjauan Pustaka

### 2.1. Deskripsi Antrian

Teori antrian dikemukakan oleh A.K Erlang seorang insinyur Denmark pada tahun 1909. Proses antrian merupakan sebuah proses yang berhubungan dengan kedatangan pelanggan pada suatu fasilitas pelayanan. Kemudian menunggu dalam suatu baris (antrian) untuk mendapatkan pelayanan.Sistem antrian adalah suatu himpunan pelanggan, pelayanan dan suatu aturan yang mengatur kedatangan para pelanggan dan pelayanannya. Sebuah sistem antrian adalah suatu proses kelahiran-kematian dengan suatu populasi yang terdiri atas para pelanggan yang sedang menunggu mendapatkan pelayanan atau yang sedang dilayani. Suatu kelahiran terjadi apabila seorang pelanggan tiba di suatu fasilitas pelayanan dan apabila pelanggannya meninggalkan fasilitas tersebut maka terjadi suatu kematian[2].

### 2.2. Unsur Dasar Antrian

Menurut[5] dalam proses antrian terdapat enam unsur penting yang terkait erat dengan sistem antrian tersebut, yaitu :

1. Distribusi kedatangan pelanggan
2. Distribusi Waktu pelayanan
3. Fasilitas pelayanan
4. Disiplin pelayanan
5. Ukuran sistem antrian
6. Sumber pemanggilan

### 2.3.Distribusi Kedatangan

Distribusi kedatangan pelanggan biasanya diperhitungkan melalui waktu antar kedatangan dua pelanggan yang berurutan pada suatu fasilitas pelayanan. Bentuk ini dapat bergantung pada jumlah pelanggan yang berada dalam sistem ataupun tidak bergantung pada keadaan sistem tersebut. Bila bentuk kedatangan ini tidak disebut secara khusus, maka dianggap bahwa pelanggan tiba satu per satu. Asumsinya adalah kedatangan pelanggan mengikuti suatu proses dengan distribusi probabilitas tertentu. Distribusi yang sering digunakan adalah distribusi poisson. Asumsi distribusi poisson menunjukkan bahwa kedatangan pelanggan sifatnya acak dan mempunyai rata-rata kedatangan sebesar *lambda* ($\lambda$).

Situasi antrian di mana kedatangan dan keberangkatan (kejadian) yang timbul selama interval waktu di kendalikan dengan kondisi berikut:

Kondisi 1 : Probabilitas dari sebuah kejadian (kedatangan atau keberangkatan) yang timbul antara $t$ dan $t + s$ bergantung hanya pada panjang $s$, yang berarti bahwa probabilitas tidak bergantung pada $t$ atau jumlah kejadian yang timbul selama periode waktu $(0,t)$.

Kondisi 2 : Probabilitas kejadian yang timbul selama interval waktu yang sangat kecil adalah positif tapi kurang dari satu.

Kondisi 3 : Paling banyak satu kejadian dapat timbul selama interval waktu yang sangat kecil.

Dari ketiga kondisi diatas menjabarkan sebuah proses di mana jumlah kejadian selama satu interval waktu yang diberikan adalah Poisson, dan oleh karena itu waktu antara beberapa kejadian yang berturut-turut adalah eksponensial. Maka dari permasalahan itu dapat dikatakan bahwa ketiga kondisi tersebut mewakili proses Poisson[7].

### 2.4. Distribusi Waktu Pelayanan

Distribusi waktu pelayanan berkaitan dengan berapa banyak fasilitas pelayanan yang dapat disediakan. Distribusi waktu pelayanan terbagi menjadi dua komponen penting, yaitu:

1. Pelayanan secara individual (*single service*)
2. Pelayanan secara kelompok (*bulk service*)

Bentuk pelayanan ditentukan oleh waktu pelayanan, yaitu waktu yang dibutuhkan untuk melayani pelanggan pada fasilitas pelayanan. Besaran ini dapat tergantung pada jumlah pelanggan yang telah berada didalam fasilitas pelayanan ataupun tidak bergantung pada fasilitas tersebut. Waktu pelayanan dapat bersifat deterministik atau berupa suatu variabel acak yang distribusi probabilitasnya dianggap telah diketahui.

Pada suatu fasilitas pelayanan, pelanggan akan masuk dalam suatu tempat pelayanan dan menerima pelayanan secara tuntas dari server. Bila tidak disebutkan secara khusus, pada bentuk pelayanan ini, maka dianggap bahwa satu pelayanan dapat melayani secara tuntas satu pelanggan.

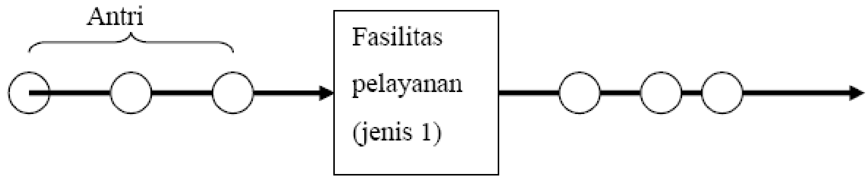
### 2.5. Fasilitas Pelayanan

Fasilitas pelayanan berkaitan erat dengan baris antrian yang akan dibentuk. Desain fasilitas pelayanan ini terbagi dalam tiga bentuk, yaitu:

1. Bentuk series, dalam satu garis lurus ataupun garis melingkar
2. Bentuk paralel, dalam beberapa garis lurus yang antara yang satu dengan yang lain paralel.
3. Bentuk *network station*, yang dapat didesain secara seri dengan pelayanan lebih dari satu pada setiap stasiun. Bentuk dapat juga dilakukan secara parelel dengan stasiun yang berbeda-beda.

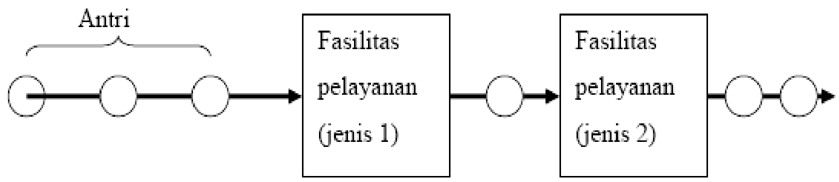
Adapun desain sistem antrian dapat dilihat sebagai berikut :

1. Sistem antrian jalur tunggal (single channel single phase), di mana dalam sistem antrian tersebut hanya terdapat satu pemberi layanan serta satu jenis layanan yang diberikan.



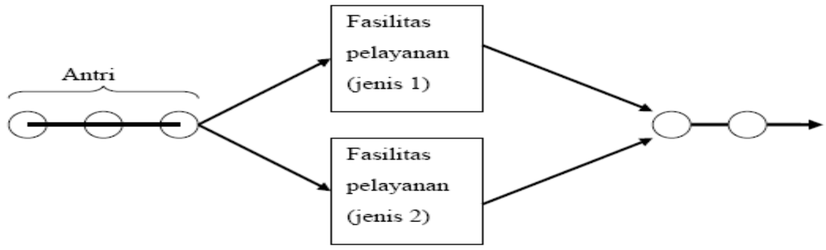

**Gambar 1.** Sistem antrian jalur tunggal

2. Sistem antrian jalur tunggal tahapan berganda (single channel multi server), di mana dalam sistem antrian tersebut terdapat lebih dari satu jenis layanan yang diberikan, tetapi dalam setiap jenis layanan hanya terdapat satu pemberi layanan.



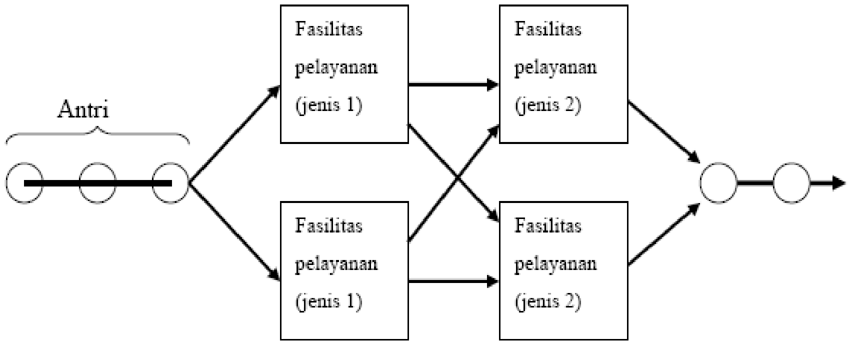

**Gambar 2.** Sistem antrian jalur tunggal tahapan berganda

3. Sistem antrian jalur berganda satu tahap (multi channel single server), di mana dalam sistem antrian terdapat satu jenis layanan dalam sistem antrian tersebut, namun terdapat lebih dari satu pemberi layanan.




**Gambar 3.** Sistem antrian jalur berganda satu tahap

4. Sistem antrian jalur berganda tahapan berganda (multi channel, multi server), di mana terdapat lebih dari satu jenis layanan dan terdapat lebih dari satu pemberi layanan dalam setiap jenis layanan.




**Gambar 4.** Sistem antrian jalur berganda tahapan berganda

## 2.6 Disiplin Pelayanan

Disiplin Pelayanan dalam antrian adalah aturan di mana para pelanggan dilayani[5]. Aturan ini dapat didasarkan pada :

1. Pertama Masuk Pertama Keluar ( FIFO).
   FIFO (*First In First Out*) merupakan suatu peraturan di mana yang dilayani terlebih dahulu adalah yang pertama kali datang.
2. Terakhir Masuk Pertama Keluar (LIFO).
   LIFO (*Last In First Out*) merupakan suatu peraturan di mana yang paling terakhir datang adalah yang dilayani paling awal.
3. Pelayanan Acak (*SIRO*).
   SIRO (*Service In Random Order*) merupakan suatu peraturan di mana pelayanan dilakukan secara acak.
4. Pelayanan Berdasarkan Prioritas (PRI).
   PRI merupakan suatu peraturan di mana pelayanan didasarkan pada prioritas khusus.

## 2.7 Sumber Pemanggilan

Suatu karakteristik yang perlu diketahui dari sumber pemanggilan ini adalah ukurannya (jumlahnya), yaitu jumlah total unit yang memerlukan pelayanan dari waktu ke waktu atau disebut jumlah total pelanggan potensial. Ini bisa dianggap terbatas ataupun tidak terbatas. Untuk jumlah pelanggan yang terbatas jumlah unit dalam sistem antrian akan mempengaruhi jumlah pelanggan potensial di luar sistem pada setiap waktu.

Tingkah laku pemanggilan populasi
Ada tiga istilah yang biasa digunakan dalam antrian untuk menggambarkan tingkah laku pemanggilan populasi[1] :

1. Jika mengikuti (renege), yakni bila seseorang bergabung dalam antrian dan kemudian meninggalkannya.
2. Menolak (balking), berarti serta-merta tidak mau bergabung.
3. Merebut (bulk), menunjukkan kondisi di mana kedatangan terjadi secara bersama-sama ketika memasuki sistem sehingga seseorang berebut menyerobot ke depan.
   Bila tidak disebutkan secara khusus, maka anggapan standarnya adalah bahwa semua pelanggan tiba satu per satu dan juga bahwa tidak terjadi penolakan dan pembatalan.

**2.8. Notasi Kendall**

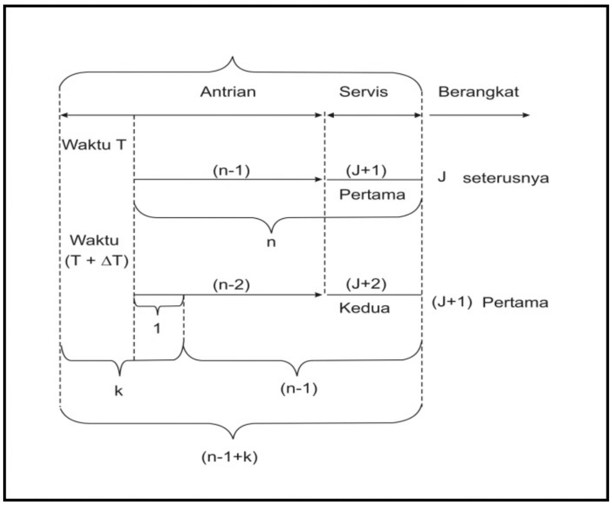
Notasi Kendall digunakan untuk merinci ciri dari suatu antrian. Notasi yang sesuai untuk meringkaskan karakteristik utama dari antrian paralel telah secara universal dibakukan dalam format berikut : [7] ( a / b / c ) : ( d / e / f )

a : Distribusi kedatangan
b : Distribusi waktu pelayanan
c : Fasilitas pelayanan atau banyaknya tempat service (stasiun serial paralel atau jaringan)
d : Disiplin pelayanan (FIFO, LIFO, SIRO) dan prioritas pelayanan.
E : 55suran sistem dalam antrian (terhingga atau tak terhingga)
f : Sumber pemanggilan (terhingga atau tak terhingga)

**2.9. Model (M/G/1) : (GD/$\infty/\infty$)**

Suatu sistem di mana pelanggan telah selesai dilayani dan pelayanan itu dimulai lagi untuk pelayanan berikutnya dalam antrian, maka waktu pelayanan tersebut berdistribusi random. Fungsi distribusi kumulatif (CDF) dari waktu pelayanan tersebut ditunjukkan dengan F(t) dan fungsi densitasnya dengan f(t) jika ada. Proses kedatangan ini dinamakan Poisson, di mana peristiwa dari kedatangan para pelanggan dapat terjadi lebih dari satu kali pada selang waktu atau ruang dengan parameter $\lambda$ [4].

Proses antrian saluran tunggal dengan kedatangan Poisson dan pelayanan umum dapat digambarkan sebagai berikut [5]:




**Gambar 5.** Proses antrian saluran tunggal dan pelayanan umum

dimana:

n = jumlah pelanggan dalam sistem

t = waktu untuk melayani pelanggan

k = jumlah pelanggan yang baru datang

n' = jumlah pelanggan setelah dilayani.

Simbol yang digunakan pada Gambar 5, menunjukkkan bahwa:

1. t mewakili waktu ketika j pelanggan berangkat dan $(t+\Delta t)$ mewakili waktu ketika pelanggan selanjutnya (j + 1) berangkat.
2. Notasi j, j + 1, j + 2, ... tidak harus diartikan bahwa pelanggan masuk dengan disiplin antrian pelayanan FCFS. Tetapi, hal itu hanya untuk memperkenalkan perbedaan keberangkatan pelanggan pada sistem. Hasil dari model ini dapat digunakan untuk beberapa disiplin antrian, yaitu FCFS, LCFS, SIRO.

Dari Gambar 1 memperlihatkan bahwa:

$$n' = \begin{cases} n-1+k, \text{untuk } n>0 \\ k \qquad\quad , \text{untuk } n=0 \end{cases} \tag{1}$$

Dari Persamaan (1), jika dalam sistem n = 0, maka sistem kosong atau tidak ada pelanggan dalam antrian dan tidak ada yang dilayani. Berarti jumlah pelanggan yang akan dilayani hanya akan sama dengan k (jumlah pelanggan yang baru datang).

Berdasarkan pengertian di atas, untuk mengetahui besar peluang atau probabilitas dari k kedatangan, maka:

$$\Pr\{k\} = \int_0^\infty \Pr\{k \mid t\}\, dF(t) \tag{2}$$

Karena kedatangan yang terjadi mengikuti distribusi Poisson dan berdasarkan persamaan (2), maka peluang kedatangan k pada saat t adalah:

$$\Pr\{k \mid t\} = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \tag{3}$$

Misalkan jumlah pelanggan setelah dilayani n` sama dengan j dan jumlah pelanggan dalam sistem n, yaitu pelanggan yang belum dilayani dan yang sedang dilayani sama dengan i, maka dari Persamaan (2) menjadi:

$$\Pr\{k = j-i+1\} = \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} dF(t), \text{untuk } j \ge i-1, i \ge 1 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad , \text{untuk } j < i-1,\ i \ge 1 \end{cases} \tag{4}$$

## 2.10. Model (M/G/c) : (GD/$\infty/\infty$)

Proses antrian dengan kedatangan berdistribusi poisson dan pola pelayanan berdistribusi umum dengan pelayanan lebih dari satu adalah menggunakan model (M/G/c) : (GD/$\infty/\infty$). Untuk model (M/G/c) : (GD/$\infty/\infty$)[4], hasil utama yang bisa diperoleh adalah probabilitas dari waktu tunggu dalam sistem yang diberikan pada persamaan

$$L_s = \lambda Ws \tag{5}$$

dan untuk waktu tunggu dalam antrian model (M/G/c) didapat dari persamaan

$$\pi_n^q = \Pr\{\text{n dalam antrian setelah keberangkatan}\} = \frac{1}{n!}\int_0^\infty (\lambda t)^n e^{-\lambda t} dW_q(t) \tag{6}$$

dengan panjang antrian rata-rata pada titik waktu kedatangan, yaitu $L_q$ adalah:

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi_n^q = \int_0^{\infty} \lambda t dW_q(t) = \lambda W_q \quad (7)$$

$W_q$ dapat dicari dengan[6] :

$$W_q = \frac{\lambda^c E[t^2](E[t])^{c-1}}{2(c-1)!(c-\lambda E([t])^2\left[\sum_{n=0}^{c-1}\frac{(\lambda E[t])^n}{n!} + \frac{(\lambda E[t])^c}{(c-1)!(c-\lambda E[t])}\right]}$$

dimana $W_q$ = ekspektasi waktu tunggu dalam antrian

## 3. Hasil dan Pembahasan

### 3.1. Formula Pollaczek – Khintchine

Model $(M/G/1):(GD/\infty/\infty)$ atau disebut juga dengan (P–K) adalah suatu formula di mana akan diperoleh pada situasi pelayanan tunggal yang memenuhi tiga asumsi berikut[3]:

1. Kedatangan Poisson dengan rata-rata kedatangan $\lambda$
2. Distribusi waktu pelayanan umum atau general dengan ekspektasi rata-rata pelayanan $E[t] = \frac{1}{\mu}$ dan varian $var[t]$
3. Keadaan steady state di mana $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$.

Selanjutnya, Persamaan (1) akan dibawa ke bentuk formula P-K, yaitu:

$$n` = n - \delta + k \quad (8)$$

dengan $\delta$ didefinisikan sebagai:

$$\delta = \begin{cases} 1 \text{ , untuk } n > 0 \\ 0 \text{, untuk } n = 0 \end{cases} \quad (9)$$

dengan n adalah jumlah pelanggan dalam sistem dan $\delta$ adalah fungsi yang memetakan setiap n ke bilangan riil, yaitu jika n = 0 (dalam sistem tidak ada pelanggan), maka tidak ada yang dilayani dan apabila dalam sistem ada n > 0 pelanggan, maka ada pelanggan yang ditunjukkan dengan nilai 1.

Dengan mengasumsikan bahwa solusi steady state, yaitu bahwa rata-rata waktu pelayanan lebih tinggi daripada rata-rata laju kedatangan dan menganggap bahwa nilai dari jumlah pelanggan dalam sistem n, serta jumlah pelanggan sesudah dilayani n` dinotasikan sama sebagai $L_s$ yang mewakili jumlah pelanggan, maka dapat diambil nilai ekspektasi dari variabel random, yaitu $E[n] = E[n`] = L_s$ dan $E[n^2] = E[(n`)^2]$.

Dengan mengambil nilai ekpektasi dari kedua sisi dari Persamaan (8), diperoleh:

$$E[n`] = E[n] - E[\delta] + E[k] \quad (10)$$

Sehingga Persamaan (10) menjadi

$$L_s = L_s - E[\delta] + E[k]$$

$$E[\delta] = E[k] \quad (11)$$

Dengan mengkuadratkan Persamaan (8), diperoleh:

$$(n`)^2 = (n - \delta + k)^2$$

$$= n^2 + k^2 + 2nk + \delta^2 - 2n\delta - 2k\delta \quad (12)$$

Karena $\delta^2 = \delta$ dan $n\delta = n$, maka Persamaan (12) menjadi:

$$(n`)^2 = n^2 + k^2 + 2nk + \delta^2 - 2n\delta - 2k\delta = n^2 + k^2 + 2nk + \delta - 2n - 2k\delta$$

$$= n^2 + k^2 + 2n(k-1) - \delta(2k-1)$$

$$\text{-} \, 2n(k-1) = n^2 - (n`)^2 + k^2 - \delta(2k-1)$$

$$n = \frac{n^2 - (n')^2 + k^2 - \delta(2k-1)}{-2(k-1)}$$

$$\frac{n^2 - (n')^2 + k^2 - \delta(2k-1)}{-2k+2}$$

$$n = \frac{n^2 - (n`)^2 + k^2 - \delta(2k-1)}{2(1-k)}$$

Dengan mengambil ekspektasi dari kedua sisi, maka:

$$E[n] = \frac{E[n^2] - E[(n`)^2] + E[k^2] - E[\delta(2k-1)]}{2(1-E[k])}$$

$$E[n] = \frac{0 + E[k^2] - 2E[\delta k] + E[\delta]}{2(1-E[k])}$$

Dengan mensubsitusikan $E[\delta] = E[k]$ dari Persamaan (11), maka:

$$E[n] = \frac{E[k^2] + E[k] - 2(E[k])^2}{2(1-E[k])} \tag{13}$$

Sekarang, E[k] dan E[$k^2$] diperlukan untuk menentukan E[n]. Karena kedatangan yang terjadi menurut distribusi Poisson, maka
Dari bentuk:

$$E[k \mid t] = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k$$

dimana $P_k$ adalah probabilita kedatangan dari k pelanggan.

Maka, $$E[k \mid t] = \sum_{k=0}^{\infty} ke^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k(k-1)!} k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{(k-1)!} = \lambda t \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{(k-1)}}{(k-1)!}$$

$$= \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{(k-1)}}{(k-1)!} = \lambda t e^{-\lambda t} e^{\lambda t} = \lambda t$$

dan,

$$E[k^2 \mid t] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P_k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} k^2$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{(k-2)!} \frac{k^2}{k(k-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{(k-2)!} \frac{k}{(k-1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{(k-2)!} \left\{1 + \frac{1}{k-1}\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{(k-1)(k-2)!}$$

$$= (\lambda t)^2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda t \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = (\lambda t)^2 + \lambda t$$

Sehingga diperoleh:

$$E[k\mid t]=\lambda t \text{ dan } E[k^2\mid t]=(\lambda t)^2+\lambda t$$

Dari harga harapan suatu mean $E[t]=\int_0^\infty t\,f(t)\,dt$ dan $\operatorname{var}(t)=E[t^2]-(E[t])^2$, maka;

$$E[k]=\int_0^\infty E[k\mid t]f(t)dt=\int_0^\infty \lambda\, t\, f(t)\,dt$$

$$E[k]=\lambda E[t] \qquad (14)$$

dan

$$E[k^2]=\int_0^\infty E[k^2\mid t]f(t)dt=\int_0^\infty \left\{(\lambda t)^2+\lambda t\right\}f(t)dt$$

$$=\lambda^2\int_0^\infty t^2 f(t)dt+\lambda\int_0^\infty t f(t)dt=\lambda^2\operatorname{var}[t]+\lambda^2(E[t])^2+\lambda E[t]$$

$$E[k^2]=\lambda^2(E[t])^2+\lambda^2\operatorname{var}[t]+\lambda E[t] \qquad (15)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (14) dan (15) ke Persamaan (13), maka :

$$E[n]=\frac{E[k^2]+E[k]-2E^2[k]}{2(1-E[k])}$$

$$=\frac{\lambda^2(E[t])^2+\lambda^2\operatorname{var}[t]+\lambda E[t]+\lambda E[t]-2\lambda^2(E[t])^2}{2(1-\lambda E[t])}$$

$$=\frac{\lambda^2(E[t])^2+\lambda^2\operatorname{var}[t]}{2(1-\lambda E[t])}+\frac{2\lambda E[t](1-\lambda E[t])}{2(1-\lambda E[t])}$$

$$=\frac{\lambda^2(E[t])^2+\lambda^2\operatorname{var}[t]}{2(1-\lambda E[t])}+\lambda E[t]$$

$$L_s=\lambda E[t]+\frac{\lambda^2(E[t])^2+\lambda^2\operatorname{var}[t]}{2(1-\lambda E[t])}$$

dengan $E[t]=\frac{1}{\mu}$ dan $\rho=\frac{\lambda}{\mu}$, maka

$$L_s=\rho+\frac{\rho^2+\lambda^2\operatorname{var}(t)}{2(1-\rho)} \qquad (16)$$

Persamaan (16) dikenal sebagai formula P-K, dimana:
$L_s$ = jumlah atau banyaknya pelanggan dalam sistem
$\lambda$ = rata-rata kedatangan pelanggan
E[t] = ekspektasi waktu pelayanan.

Diasumsikan bahwa $\lambda_n$ adalah konstan untuk semua *n*, sehingga cukup ditulis $\lambda$. Maka dalam proses antrian yang steady state didapat[3]:

$$L=\lambda W$$

dimana:

L = jumlah pelanggan dalam sistem
W = waktu menunggu dalam sistem

dan

$$L_q=\lambda W_q$$

dimana:

$L_q$ = jumlah pelanggan dalam antrian

$W_q$ = waktu menunggu dalam antrian.

Kemudian asumsikan bahwa pelayanan rata-rata konstan untuk semua $n \geq 1$, sehingga cukup ditulis dengan $\frac{1}{\mu}$. Dengan memberikan $\mu$ adalah rata-rata pelayanan, maka ekspektasi waktu pelayanan adalah $\frac{1}{\mu}$ sehingga:

$W_s$ = waktu menunggu dalam sistem

$W_s$ = waktu tunggu dalam antrian + waktu pelayanan

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Dikalikan dengan $\lambda$, didapatkan:

$$\lambda W_s = \lambda W_q + \frac{\lambda}{\mu}.$$

## 4. Kesimpulan.

Formula Pollaczek – Khintchine untuk Model (M/G/1):(GD/$\infty$/$\infty$) adalah

$$L_s = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \operatorname{var}(t)}{2(1-\rho)}$$

## DAFTAR PUSTAKA

1. Aminudin, *Prinsip-Prinsip Riset Operasi*, Erlangga, Jakarta, 2005.
2. Bronson, R., *Teori dan Soal-Soal Operation Reserch*, PT Gelora Aksara Pratama,1991.
3. Dimyati, A., *Operations Research Model-Model Pengambilan Keputusan*, Sinar Baru, Bandung, 1987.
4. Gross, D and Haris, C. M., *Fundamental of Queueing Theory*, Third Edition, John Willey and Sons, Inc., New York, 1998.
5. Kakiay, T. J., *Dasar Teori Antrian untuk Kehidupan Nyata*, ANDI, Yogyakarta, 2004.
6. Ross, S. M., *Introduction to Probability Models*, Sixth Edition, Academy Press, New York, 1997.
7. Taha, H. A., *Riset Operasi*, Jilid 2, Binarupa Aksara, Jakarta, 1996.