MODEL EKSPONENSIAL GANDA PADA PROSES STOKASTIK (STUDI KASUS DI STASIUN PURWOSARI)

Sugito[1], Yuciana Wilandari[2]
[1,2]Staf Pengajar Jurusan Statistika FSM Undip
sugitozafi@undip.ac.id, yucianawilandari@gmail.com

Abstract

In general, mathematical modeling is divided into two, namely the model of deterministic and stochastic models. On stochastic modeling involves several processes among them are the Poisson process, the process of Bernoulli, Gaussian processes, the process of renewal and other processes. Specifically for the Poisson process often found in modeling queuing theory. At Poisson process there are four kinds of sub model that can be formed that is Double Poisson models, Exponential Poisson models, Poisson Exponential model, and Double Exponential models. In this paper will discuss the Double Exponential model in stochastic processes , specifically for the Poisson process. Analysis was performed on the data arrival time and service time. The model is a model (M / M / c) : (GD / ~, ~) which is a double exponential model in stochastic processes.

Keywords: Double Exponential, Poisson Process, Stochastic Process

1. Pendahuluan

Secara garis besar pemodelan matematika dapat dikelompokkan menjadi 2 bagian yaitu pemodelan deterministik dan pemodelan stokastik. Pada Pemodean stokastik terbagi beberapa proses diantaranya yaitu proses poisson, proses bernoulli, proses gaussian, proses pembaharuan dan lain-lain[5]. Pemodelan yang terjadi pada kehidupan sehari-hari sebagian besar bisa didekati dengan pendekatan proses stokastik poisson.

Proses poisson banyak dijumpai pada pemodelan teori antrian. Antrian merupakan bagian dari proses poisson yaitu suatu fenomena menunggu yang menjadi bagian dari kehidupan sehari-hari manusia[6]. Sebagian besar manusia secara sadar atau tidak sadar, pernah mengalami situasi antrian atau sering disebut dengan situasi menunggu. Situasi menunggu juga merupakan bagian dari keadaan yang terjadi dalam rangkaian kegiatan operasional yang bersifat random dalam suatu fasilitas pelayanan. Pelanggan datang ke suatu tempat dengan waktu yang acak, tidak teratur dan tidak dapat segera dilayani. Situasi antrian yang pada umunya terjadi pada kehidupan sehari-hari diantaranya yaitu: kereta api yang masuk di stasiun kereta api, pesawat yang akan mendarat atau tinggal landas, mesin yang akan diperbaiki, pasien yang ingin periksa ke dokter, orang yang mengantri membeli bensin di pom bensin dan nasabah yang akan melakukan transaksi di bank serta bis-bis yang ngantri diterminal.

Pada proses poisson ini terdapat 4 macam model yang dibentuk yaitu model poisson ganda, model poisson eksponensial, model eksponensial poisson, dan model eksponensial ganda[5]. Hal ini tergantung pada jenis data yang digunakan untuk menentukan model antriannya khususnya penentuan notasi a dan notasi b pada model antrian (a/b/c):(d/e/f). Pada penentuan model antrian notasi a bisa menggunakan data jumlah kedatangan atau waktu antar kedatangan. Sedangkan untuk menentukan notasi b bisa menggunakan data jumlah yang terlayani atau waktu pelayanan. Pada tulisan ini akan dibahas model eksponensial ganda pada proses stokastik. Model eksponensial ganda adalah model proses stokastik poisson khususnya model antrian dimana distribusi notasi a dan notasi b keduanya berdistribusi eksponensial. Sehingga yang akan digunakan untuk menetukan notasi a dan b pada model antriannya akan menggunakan data waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan.

Masalah antrian kereta api di stasiun merupakan salah satu masalah yang sangat perlu diperhatikan. Fenomena antrian tampak ditemukan dalam fasilitas-fasilitas pelayanan umum, salah satunya terlihat pada antrian kereta api di Stasiun Purwosari Solo. Dengan banyaknya jenis dan jumlah kereta api yang melewati Stasiun Purwosari menyebabkan terjadinya antrian panjang pada kereta api yang akan datang atau pergi dari stasiun tersebut. Adanya antrian kereta api tersebut maka penumpang yang menunggu pemberangkatan dari stasiun semakin bertambah banyak.

Berdasarkan kajian diatas yang menjadi fokus dalam tulisan ini yaitu bagaimana memodelkan dan menganalisis sistem kedatangan dan keberangkatan kereta api di stasiun Purwosari dengan menggunakan pendekatan model eksponensial ganda pada proses stokastik.

2.Tinjauan Pustaka

2.1 Konsep Dasar Antrian

Teori antrian dikemukakan dan dikembangkan oleh AK. Erlang, seorang insinyur Denmark, pada tahun 1910. Proses antrian sendiri merupakan suatu proses yang berhubungan dengan kedatangan pelanggan pada suatu fasilitas pelayanan, menunggu dalam baris antrian jika belum dapat dilayani, dilayani dan akhirnya meninggalkan fasilitas tersebut sesudah dilayani. Terdapat beberapa faktor penting yang terkait erat dengan sistem antrian yaitu[4]:

1. Distribusi Kedatangan
2. Distribusi Waktu Pelayanan
3. Fasilitas Pelayanan
   a. Bentuk Series
   b. Bentuk Pararel
   c. Bentuk Network Station
4. Disiplin Pelayanan
5. Ukuran dalam Antrian
   a. Ukuran kedatangan secara tidak terbatas
   b. Ukuran kedatangan secara tidak terbatas
6. Sumber Pemanggilan
   a. Sumber Panggilan terbatas
   b. Sumber Panggilan tak terbatas

2.2 Notasi Kendall

Notasi kendall digunakan untuk merinci ciri dari suatu antrian. Notasi yang sesuai untuk meringkaskan karakteristik utama dari antrian paralel telah secara universal dibakukan dalam format berikut[6]:

$$(a / b / c) : (d / e / f)$$

a : Distribusi kedatangan
b : Distribusi waktu pelayanan
c : Fasilitas pelayanan atau banyaknya tempat servis (stasiun serial)

d : Disiplin pelayanan
Pertama datang pertama dilayani (FCFS), terakhir datang pertama dilayani (LCFS), Pelayanan dalam random order (SIRO) dan prioritas pelayanan
e : Ukuran sistem dalam antrian (terhingga atau tak terhingga)
f : Sumber pemanggilan (terhingga atau tak terhingga)

2.3 Ukuran *Steady-state*

Probabilitas *steady-state* dalam sistem yang ditentukan yaitu $\lambda < \mu$, dimana λ adalah rata-rata laju kedatangan dan μ adalah rata-rata laju pelayanan, maka ρ dapat ditulis sebagai berikut[6]: $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$. Notasi dalam kondisi steady-state:

L_s = jumlah pelanggan yang diperkirakan dalam system
L_q = jumlah pelanggan yang diperkirakan dalam antrian
W_s = Waktu menunggu yang diperkirakan dalam system
W_q = Waktu menunggu yang diperkirakan dalam antrian

2.4 Proses Poisson dan Distribusi Eksponensial

Pada umumnya proses antrian diasumsikan bahwa waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan mengikuti distribusi eksponensial, atau sama dengan jumlah kedatangan dan jumlah pelayanannya mengikuti distribusi Poisson[2].

Proses Poisson adalah proses cacah yang mempunyai batasan tertentu, yaitu diantaranya N(t) mengikuti distribusi Poisson dengan rata-rata λt dimana λ suatu konstanta, sehingga pada distribusi Poisson harga rata-ratanya bergantung pada t atau merupakan fungsi t[3]. Beberapa asumsi untuk proses Poisson yaitu[5]:

1. Independen
   N(t) merupakan banyaknya kejadian dimana peristiwa E terjadi selama waktu t, sejak awal proses, atau selama interval waktu (0,t). N(t) independen terhadap banyaknya kejadian peristiwa E yang terjadi di dalam selang waktu yang lalu artinya N(t) tak tergantung pada pengalaman yang lalu.
2. Homogenitas dalam waktu
   Yang dimaksud dengan homogenitas dalam waktu ialah $P_n(t)$ hanya tergantung pada panjang t atau panjang selang waktu tetapi tidak tergantung dimana selang waktu berada.
   $P_n(t)$ = probabilitas banyaknya kejadian peristiwa E terjadi selama waktu t atau dalam selang waktu $(t_1, t+t_1)$, untuk setiap harga t_1.
3. Regularitas
   Di dalam suatu interval kecil Δt, probabilitas bahwa tepat satu kejadian terjadi adalah $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ dan probabilitas bahwa banyaknya kejadian terjadi lebih dari sekali adalah $o(\Delta t)$ dalam interval Δt, sedangkan simbol $o(\Delta t)$ digunakan untuk menyatakan fungsi Δt yang mendekati 0 lebih cepat dari Δt sendiri mendekati 0, dinotasikan $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$ [3] .

2.5 Uji Kecocokan Distribusi

Pengujian *Kolmogorov-Smirnov* merupakan salah satu uji perbandingan dalam statistika non-parametrik[4]. Pengujian ini dapat dinyatakan sebagai suatu cara untuk menguji “apakah terdapat perbedaan yang signifikan antara distribusi frekuensi observasi dengan distribusi frekuensi teoritis”.

Menurut[1], langkah-langkah uji *Kolmogorov-Smirnov* yaitu:

1. Menentukan hipotesis
   H_0 : Sampel yang diambil berasal dari populasi berdistribusi A
   H_1 : Sampel yang diambil tidak berasal dari populasi berdistribusi A
2. Menentukan taraf signifikansi
3. Statistik Uji :
   $$D = \sup | S(x) - F_0(x)|$$
   dengan $S(x)$: fungsi distribusi empiris
   $F_0(x)$: fungsi distribusi yang dihipotesiskan
4. Kriteria Uji:
   Tolak H_0 jika $D > D^*(\frac{\alpha}{2};N)$ dengan $D^*(\frac{\alpha}{2};N)$ adalah nilai kritis tabel *Kolmogorov-Smirnov*, karena nilai D selalu positif sehingga tidak ada daerah penolakannya yang di sebelah kiri.

2.6 Model (M/M/c):(GD/∞/∞)

Model antrian (M/M/c):(GD/∞/∞) adalah model antrian dengan pola kedatangan berdistribusi Poisson/Eksponensial, pola pelayanan berdistribusi Poisson/Eksponensial dengan jumlah pelayan adalah c. Disiplin antrian yang digunakan pada model ini adalah umum FCFS (*First Come First Served*), dan ∞ menyatakan bahwa kapasitas sistem dan sumber pemanggilannya tidak terbatas.

Pada perhitungan kondisi steady state[2], dengan memisalkan $r = \frac{\lambda}{\mu}$ dan $\rho = \frac{r}{c} = \frac{\lambda}{c\mu}$, diperoleh probabilitas pelayanan ketika tidak ada pelanggan yang datang sebagai berikut:

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(r)^n}{n!} + \frac{(r)^c}{c!(1-\rho)} \right\}^{-1}$$

Sedangkan probabilitas untuk n pelanggan dapat ditulis:

$$P_n = \frac{P_0}{c!\mathrm{c}^{\mathrm{n-c}}} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) = \frac{r^n}{c!\mathrm{c}^{\mathrm{n-c}}} P_0$$

Dengan demikian diperoleh ukuran kinerja sistem untuk model (M/M/c) : (GD/∞/∞) sebagai berikut:

1. Jumlah rata-rata pelanggan yang diperkirakan dalam antrian
   $$L_q = \left(\frac{r^c \rho}{c!(1-\rho)^2} \right) P_0$$
2. Jumlah rata-rata pelanggan yang diperkirakan dalam sistem
   $$L_s = L_q + r$$
   $$= \left(\frac{r^c \rho}{c!(1-\rho)^2} \right) P_0 + r$$
3. Waktu rata-rata menunggu yang diperkirakan dalam antrian

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$
$$= \left(\frac{r^c}{c!(c\mu)(1-\rho)^2}\right)P_0$$

4. Waktu rata-rata menunggu yang diperkirakan dalam sistem

$$W_s = \frac{1}{\mu} + W_q$$
$$= \frac{1}{\mu} + \left(\frac{r^c}{c!(c\mu)(1-\rho)^2}\right)P_0$$

2.7 Model (G/G/c):(GD/∞/∞)

Model Antrian (G/G/c) : (GD/∞/∞) adalah model antrian dengan pola kedatangan berdistribusi umum (*General*), pola pelayanan berdistribusi umum (*General*), dengan jumlah fasilitas pelayanan sebanyak c pelayanan[2]. Disiplin antrian yang digunakan pada model ini adalah umum FCFS (*First Come First Served*), kapasitas maksimum yang diperbolehkan dalam sistem adalah ∞. Ukuran-ukuran kinerja sistem pada model *General* ini mengikuti ukuran kinerja pada model M/M/c, terkecuali untuk perhitungan jumlah pelanggan yang diperkirakan dalam antrian (L_q) adalah sebagai berikut

$$L_q = L_{qM/M/c}\,\frac{\mu^2 + v(t) + v(t')\lambda^2}{2}$$

3. Metodologi

3.1. Sumber Data

Data yang digunakan dalam tulisan ini adalah data primer. Data primer tersebut adalah data waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan kereta api di stasiun Purwosari. Data ini meliputi data waktu antar kedatangan kereta api, dan data waktu pelayanan kereta api di stasiun Purwosari selama 2 minggu.

3.2. Langkah-langkah Analisis

Adapun langkah-langkah dalam pelaksanaan penelitian dan analisis data adalah sebagai berikut:

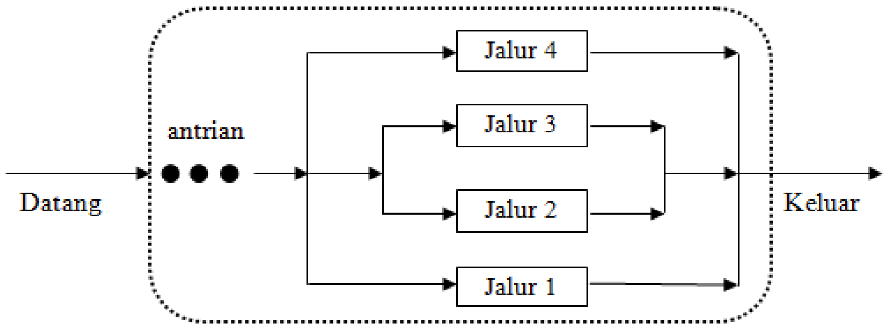
1. Melakukan penelitian secara langsung untuk mendapatkan data waktu antar kedatangan kereta api dan data waktu pelayanan kereta api dalam satuan waktu yang ditentukan.
2. Melakukan pengecekan *steady-state*. Data yang sudah didapat harus memenuhi *steady-state* ($\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$), dimana λ adalah rata-rata waktu antar kedatangan dan μ adalah rata-rata waktu pelayanan.
3. Menguji kecocokan distribusi untuk pola waktu antar kedatangan dan pola waktu pelayanan dengan menggunakan uji *Kolmogorov-Smirnov*, jika hipotesa diterima maka dapat disimpulkan bahwa data mengikuti distribusi Eksponensial, jika hipotesa ditolak maka data mengikuti distribusi umum (*general*).
5. Menentukan model antrian yang sesuai dengan data.
6. Menentukan ukuran kinerja dari sistem antrian, yaitu jumlah pelanggan yang diperkirakan dalam sistem (L_s), jumlah pelanggan yang diperkirakan dalam antrian

(L_q), waktu menunggu yang diperkirakan dalam sistem (W_s) dan waktu menunggu yang diperkirakan dalam antrian (W_q).
7. Menentukan hasil dan pembahasan yang dapat diperoleh dari ukuran kinerja sistem antrian.
8. Pengambilan kesimpulan tentang sistem pelayanan kereta api di stasiun Purwosari.

Alat yang digunakan dalam pengolahan dan analisis data pada penelitian ini menggunakan software Ms. Excel, SPSS, dan WinQSB.

4. Hasil dan Pembahasan

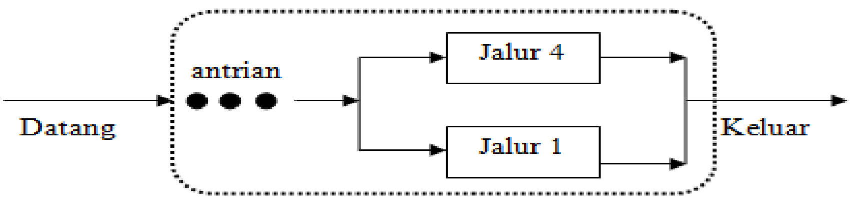
Pada Stasiun Purwosari, jalur kereta api menuju dari arah barat dan atau arah timur. Untuk arah barat, jalur rel kereta api menuju arah Jakarta, Bandung, Cirebon, Purwokerto, dan Yogyakarta, sedangkan untuk arah timur jalur rel kereta api menuju arah Madiun, Malang, Jember dan Surabaya. Sistem antrian kereta api di Stasiun Purwosari adalah sebagai berikut



Gambar 1. Sistem Antrian Kereta Api di Stasiun Purwosari

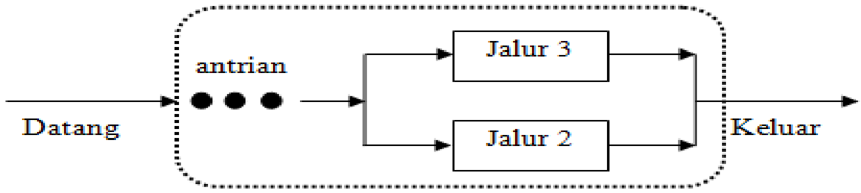
Stasiun Purwosari memiliki 4 buah jalur utama, dimana jalur 1 dan 4 lebih sering digunakan untuk menaikkan penumpang kereta yang berasal dari Stasiun Purwosari. Sedangkan jalur 2 dan 3 merupakan jalur lurus yang digunakan untuk efisiensi waktu dan merupakan jalur kereta langsung ataupun transit.

Sistem antrian kereta api untuk pelayanan jalur 1 dan 4 di Stasiun Purwosari dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 2. Sistem Antrian Kereta Api untuk Pelayanan Jalur 1 dan 4 di Stasiun Purwosari

Sedangkan sistem antrian kereta api untuk pelayanan jalur 2 dan 3 di Stasiun Purwosari dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 3. Sistem Antrian Kereta Api untuk Pelayanan Jalur 2 dan 3 di Stasiun Purwosari

Pada Gambar 2 dan Gambar 3 ini merupakan ilustrasi dari sistem antrian kereta api yang merupakan contoh pemodelan eksponensial ganda pada proses stokastik.

4.1. Ukuran *Steady state*

Kondisi *steady state* terpenuhi jika nilai tingkat kegunaan (ρ) < 1 artinya rata-rata waktu antar kedatangan kereta di jalur tersebut lebih kecil dari waktu rata-rata laju pelayanan. Hal ini juga dapat diartikan suatu kondisi dimana laju kedatangan kereta masih mampu dilayani secara efektif sebaliknya bila laju kedatangan kereta terlalu banyak sehingga *server* tidak mampu melayani semuanya maka akan terjadi penumpukan antrian kereta. Untuk menghitung nilai ρ tersebut perlu diketahui nilai rata-rata waktu antar kedatangan dan rata-rata waktu pelayanan. Dari data penelitian diperoleh nilai ρ sebagai berikut:

Tabel 1. Ukuran *Steady State*

Jalur	c	λ	μ	$\rho = \frac{\lambda}{c \times \mu}$
1 dan 4	2	0,31269	2,841225	0,055028
2 dan 3	2	3,14959	23,25616	0,067715

Keterangan proses penentuan parameter ada di Lampiran

Berdasarkan Tabel 1, didapatkan hasil bahwa nilai tingkat kegunaan kurang dari satu yang berarti kondisi *steady state* terpenuhi sehingga sistem pelayanan kereta api di Stasiun Purwosari sudah baik dan hasil yang diperoleh dapat digunakan untuk menentukan ukuran kinerja sistem.

4.2 Uji Kecocokan Distribusi

Uji kecocokan distribusi yang digunakan untuk menguji data waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan kereta di purwosari adalah menggunakan uji Kolmogorov Smirnov dengan H_0 : data waktu antar kedatangan/data waktu pelayanan kereta berdistribusi eksponensial dan H_1: data waktu antar kedatangan/data waktu pelayanan kereta tidak berdistribusi eksponensial serta taraf signifikansi 5%.

Tabel 2. Uji Kecocokan Distribusi Jalur 1 dan 4

Data	D	D_{tabel}	Nilai Sig.	Keputusan
Waktu Antar Kedatangan	0,148	0,190	0,211	H_0 diterima
Waktu Pelayanan	0,093	0,190	0,770	H_0 diterima

Berdasarkan Tabel 2 dapat disimpulkan bahwa data waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan berdistribusi eksponensial.

Tabel 3. Uji Kecocokan Distribusi Jalur 2 dan 3

Data	D	D_{tabel}	Nilai Sig.	Keputusan
Waktu Antar Kedatangan	0,107	0,059	0,000	H_0 ditolak
Waktu Pelayanan	0,321	0,059	0,000	H_0 ditolak

Berdasarkan Tabel 3 dapat disimpulkan bahwa data waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan berdistribusi umum (*general*) tidak berdistribusi eksponensial.

4.3 Model Antrian

1. Jalur 1 dan 4

Berdasarkan hasil analisis *steady-state* serta uji kecocokan distribusi waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan kereta dapat ditentukan bahwa model sistem antrian untuk jalur 1 dan 4 adalah (M/M/2) : (GD/∞/∞). Model tersebut adalah model sistem antrian dengan distribusi waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan kereta berdistribusi Eksponensial, dengan jumlah fasilitas pelayanan sebanyak 2 jalur, disiplin antrian yang digunakan adalah yang pertama datang yang pertama dilayani (FCFS), serta jumlah kapasitas pelanggan yang datang dan sumber pemanggilan tidak terbatas. Interval waktu yang digunakan adalah 1 jam. Model (M/M/2) : (GD/∞/∞) ini merupakan contoh model eksponensial ganda.

2. Jalur 2 dan 3

Berdasarkan hasil analisis *steady-state* serta uji kecocokan distribusi waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan kereta dapat ditentukan bahwa model sistem antrian untuk jalur 2 dan 3 adalah (G/G/2) : (GD/∞/∞). Model tersebut adalah model sistem antrian dengan distribusi waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan kereta berdistribusi General, dengan jumlah pelayanan sebanyak 2 jalur, disiplin antrian yang digunakan adalah yang pertama datang yang pertama dilayani (FCFS), serta jumlah kapasitas pelanggan yang datang dan sumber pemanggilan tidak terbatas. Interval waktu yang digunakan adalah 1 jam. Model ini merupakan contoh model eksponensial ganda yang gagal.

4.4 Ukuran Kinerja Sistem

1. Jalur 1 dan 4

Tabel 4. Ukuran Kinerja Sistem Jalur 1 dan 4

c	λ	μ	L_s	L_q	W_s	W_q	P_0
2	0,31269	2,841225	0,1104	0,0003	0,35303	0,0011	0,89569

Berdasarkan hasil *output* dapat diketahui bahwa:

1. Rata-rata waktu antar kedatangan (λ) = 0,31269 kereta per jam.
2. Rata-rata waktu pelayanan (μ) = 2,841225 kereta per jam.
3. Jumlah kereta yang diperkirakan dalam sistem (L_s) = 0,1104 kereta per jam.
4. Jumlah kereta yang diperkirakan dalam antrian (L_q) = 0,0003 kereta per jam.
5. Waktu menunggu yang diperkirakan dalam sistem (W_s) = 0,35303 per jam yaitu sekitar 21,1818 menit.
6. Waktu menunggu yang diperkirakan dalam antrian (W_q) = 0,0011 per jam yaitu sekitar 0,066 menit.

7. Probabilitas bahwa jalur tersebut menganggur ketika tidak ada kereta yang datang (P_0) = 0,89569.

2. Jalur 2 dan 3

Tabel 5. Ukuran Kinerja Sistem Jalur 2 dan 3

c	λ	µ	L_s	L_q	W_s	W_q	P_0
2	3,1496	23,2558	0,1362	0,0008	0,0432	0,0002	0,873156

Berdasarkan hasil *output* dapat diketahui bahwa:

1. Rata-rata waktu antar kedatangan (λ) = 3,1496 kereta per jam.
2. Rata-rata waktu pelayanan (μ) = 23,2558 kereta per jam.
3. Jumlah kereta yang diperkirakan dalam sistem (L_s) = 0,1362 kereta per jam.
4. Jumlah kereta yang diperkirakan dalam antrian (L_q) = 0,0008 kereta per jam.
5. Waktu menunggu yang diperkirakan dalam sistem (W_s) = 0,0432 per jam yaitu sekitar 2,592 menit.
6. Waktu menunggu yang diperkirakan dalam antrian (W_q) = 0,0002 dari per jam yaitu sekitar 0,012 menit.
7. Probabilitas bahwa jalur tersebut menganggur ketika tidak ada kereta yang datang (P_0) = 0,873156.

5. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan analisis dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Model antrian pada jalur 1 dan 4 di stasiun Purwosari adalah (M/M/2) : (GD/∞/∞). Model ini adalah merupakan model eksponensial ganda.
2. Berdasarkan hasil analisis *steady-state* serta uji kecocokan distribusi waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan kereta dapat ditentukan bahwa model sistem antrian untuk jalur 2 dan 3 adalah (G/G/2) : (GD/∞/∞). Model ini merupakan model eksponensial ganda yang gagal.

DAFTAR PUSTAKA

1. Daniel, W.W., *Statistika Nonparametrik Terapan*, diterjemahkan oleh Alex Tri Kantjono W., Gramedia, Jakarta, 1989.
2. Gross, D and Harris, C.M., *Fundamental of Queueing Theory Third Edition*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1998.
3. Gupta and Kapoor, K., *Mathematical Statistics*, Daryaganj, New Delhi, 1982.
4. Kakiay, T.J., *Dasar Teori Antrian Untuk Kehidupan Nyata*, Andi,Yogyakarta, 2004.
5. Praptono, *Pengantar Proses Stokastik I*, Karunika, Jakarta, 1986.
6. Taha, H.A., *Riset Operasi Jilid 2*, diterjemahkan oleh Daniel Wirajaya, Binarupa Aksara, Jakarta, 1996.

LAMPIRAN

1. Jalur 1 dan 4

Waktu Antar Kedatangan	
Jumlah Total	9786
N	51
Mean (menit)	191,882353
Mean (1 jam)	0,312692
1 / Mean	3,198039
SD (menit)	130,339349
SD (1 jam)	0,460337
1 / SD (1 jam)	2,172323

Waktu Pelayanan	
Jumlah Total	1077
N	51
Mean (menit)	21,11765
Mean (1 jam)	2,841225
1 / Mean	0,351961
SD (menit)	22,29228
SD (1 jam)	2,691515
1 / SD (1 jam)	0,371538

Steady state **Waktu Antar Kedatangan dan Waktu Pelayanan**	
λ	0,312692
μ	2,841225
λ / μ	0,110055
ρ	0,055028

2. Jalur 2 dan 3

Waktu Antar Kedatangan	
Jumlah Total	9887
N	519
Mean (menit)	19,050096
Mean (1 jam)	3,149590
1 / Mean	0,317502
SD (menit)	15,990990
SD (1 jam)	3,752113
1 / SD (1 jam)	0,266517

Waktu Pelayanan	
Jumlah Total	1339
N	519
Mean (menit)	2,579961
Mean (1 jam)	23,256160
1 / Mean	0,042999
SD (menit)	3,432873
SD (1 jam)	17,478070
1 / SD (1 jam)	0,057215

Steady state **Waktu Antar Kedatangan dan Waktu Pelayanan**	
λ	3,149590
μ	23,256161
λ / μ	0,135430
ρ	0,067715