



Optimasi Debit Banjir Guna Mereduksi Dampak *Local Scouring* pada Hilir Bendung Karet Sungai Juwana dengan Metode *Linear Programming*

**Bagas Yoga Pratama*, Ismail Sa'ud, Made Indrayana Supriyatna,
Harum Nashikhatul Insani**

Teknik Infrastruktur Sipil, Fakultas Vokasi, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

*) Email corresponding author: bagasyogap@its.ac.id

Received: 15 Maret 2025 Revised: 19 November 2025 Accepted: 14 Juli 2026

Abstract

The Juwana Rubber Dam has a water level difference of 2.95 m and a fluctuating spillway discharge, which may cause local scour downstream of the structure. Studies linking discharge variations to local scour at rubber dams, particularly on the Juwana River, remain limited. This study aims to estimate downstream local scour depth for several return periods, compare three empirical methods, and determine the optimum spillway discharge theoretically. Design floods were computed using the Nakayasu Synthetic Unit Hydrograph for return periods of 25, 50, and 100 years (136.73, 148.53, and 156.80 m³/s). Considering downstream flow velocity and hydraulic jump height, scour depth was estimated using the Lacey, Wu, and Veronese methods, and the optimum discharge was determined by linear programming (POM-QM velocity, jump height, and discharge constraints). Scour depth increased with return period in all methods: 5.255–5.500 m (Lacey), 1.876–2.042 m (Wu), and 3.061–3.343 m (Veronese), with optimum discharges of 141.238, 143.144, and 143.430 m³/s, respectively. The methods differ substantially; for the 25-year return period, Wu's scour depth is 64.30% smaller than Lacey's. Among the three methods compared, Wu gives the smallest estimate and Lacey the largest (most conservative). Because this study is not supported by field measurements, the accuracy of each method could not be assessed, and the results should be regarded as an estimated range requiring verification with downstream bathymetric data.

Keywords: Rubber dam, runoff discharge, Lacey, Wu, Veronese

Abstrak

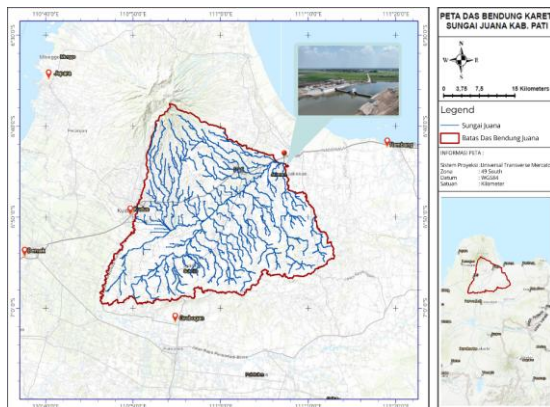
Bendung Karet Sungai Juwana memiliki beda tinggi muka air sebesar 2,95 m dan debit limpasan yang berfluktuasi, sehingga berpotensi menimbulkan gerusan lokal di hilir bendung. Kajian yang menghubungkan variasi debit limpasan dengan gerusan lokal pada bendung karet, khususnya di Sungai Juwana, masih terbatas. Penelitian ini bertujuan mengestimasi kedalaman gerusan lokal hilir bendung pada beberapa kala ulang, membandingkan tiga metode empiris, dan menentukan debit limpasan optimum secara teoritis. Debit banjir rencana dihitung dengan Hidrograf Satuan Sintetis (HSS) Nakayasu untuk kala ulang 25, 50, dan 100 tahun, yaitu 136,73; 148,53; dan 156,80 m³/s. Dengan mempertimbangkan kecepatan aliran dan tinggi loncatan air di hilir, kedalaman gerusan diestimasi menggunakan metode Lacey, Wu, dan Veronese, kemudian debit optimum ditentukan dengan linear programming (POM-QM) dengan batasan kecepatan, tinggi loncatan, dan debit. Kedalaman gerusan meningkat seiring kala ulang pada ketiga metode, yaitu 5,255–5,500 m (Lacey), 1,876–2,042 m (Wu), dan 3,061–3,343 m (Veronese), dengan debit optimum masing-masing 141,238; 143,144; dan 143,430 m³/s. Hasil antarmetode berbeda jauh; pada kala ulang 25 tahun, gerusan metode Wu 64,30% lebih kecil dibanding Lacey. Di antara ketiga metode yang dibandingkan, Wu memberikan estimasi terkecil dan Lacey terbesar (paling konservatif). Karena penelitian ini belum dilengkapi data pengukuran lapangan, akurasi masing-masing metode belum dapat dinilai, sehingga hasilnya dipandang sebagai rentang estimasi yang perlu diverifikasi dengan data batimetri hilir bendung.

Kata kunci: Bendung karet, debit limpasan, gerusan, Lacey, Wu, Veronese

Pendahuluan

Gerusan lokal adalah fenomena alam yang dapat terjadi di sungai akibat morfologi sungai atau adanya bangunan yang menghalangi aliran air, seperti bendung (Sarwono, 2017). Proses ini dapat dipicu oleh perubahan pola aliran, turbulensi, dan kecepatan aliran yang berubah akibat hambatan struktural. Pada Gambar 1 secara geografis Sungai Juwana terletak pada koordinat $7^{\circ}0'8,928''$ LS dan $109^{\circ}10'37,909''$ BT, di wilayah dengan topografi landai, dengan ketinggian berkisar antara 0-200 mdpl, dan dilengkapi dengan bendung karet di bagian hilir sungai. Bendung karet tersebut berada pada bagian hilir Daerah Aliran Sungai (DAS) Juwana (Gambar 1). Bendung gerak ini dibangun untuk mengatasi banjir akibat berkurangnya kapasitas Sungai Juwana secara drastis dari 1.650 m^3 menjadi 150 m^3 (Kementerian Pekerjaan Umum dan Perumahan Rakyat, 2015).

Berdasarkan hasil pencatatan AWLR (automatic water level recorder) bendung tersebut memiliki perbedaan elevasi muka air diatas mercu dengan elevasi muka air loncatan sebesar 2,95m. Perbedaan elevasi yang cukup besar di sekitar bendung menyebabkan terjadinya gerusan lokal (*local scouring*) di bagian hilir bendung, yang berpotensi mengganggu stabilitas struktur bendung. Hal ini menjadi masalah serius karena dapat menyebabkan kerusakan pada struktur bendung dan mengganggu aliran air di daerah hilir.



Gambar 1. Peta DAS Sungai Juwana

Kajian terkait evaluasi debit limpasan pada Bendung Karet Sungai Juwana, khususnya dengan mempertimbangkan variasi kala ulang yang berbeda, masih sangat terbatas. Debit limpasan adalah volume aliran permukaan yang melewati suatu penampang per satuan waktu sebagai respons terhadap hujan efektif pada daerah tangkapan, setelah memperhitungkan kehilangan hidrologis seperti infiltrasi dan penyimpanan permukaan (Kencanawati, *et al.*, 2023). Kala ulang sangat penting karena variasi debit pada setiap kala ulang

dapat menghasilkan karakteristik hidraulik yang berbeda dan berpengaruh terhadap besarnya gerusan lokal, dimana peningkatan debit cenderung meningkatkan kedalaman gerusan di hilir bangunan air (Fathi, *et al.*, 2024).

Sebagian besar penelitian hanya menggunakan satu metode analisis gerusan, sementara penggunaan beberapa metode secara bersamaan, terutama pada bendung karet dengan debit variatif, masih jarang diterapkan. Analisis gerusan yang terjadi di bagian hilir bendung belum sepenuhnya dioptimalkan, padahal analisis ini sangat penting untuk mengurangi risiko erosi yang dapat merusak struktur bendung (Yosufzai *et al.*, 2025). Oleh karena itu, penting untuk mengoptimalkan pola operasi bendung agar muka air di bagian hulu tidak melebihi elevasi +1,00m guna menghindari dampak buruk yang ditimbulkan akibat erosi (Zhang, Liu and Gan, 2024).

Pada bagian hilir bendung, terdapat sedimentasi dengan gradasi butiran tanah sebesar 0,01 mm yang termasuk dalam kategori tanah berpasir (Mahdian Khalili and Hamidi, 2026). Tanah berpasir ini dapat meningkatkan kerentanan terhadap gerusan lokal. Material dasar berpasir memiliki kerentanan relatif tinggi karena karakteristiknya yang nonkohesif, sehingga butiran sedimen lebih mudah mengalami mobilisasi ketika tegangan geser aliran melampaui tegangan geser kritisnya (Zhang *et al.*, 2022, Kiraga and Popek, 2020). Di hilir bendung, peningkatan kecepatan, turbulensi, dan pembentukan pusaran akibat perubahan kondisi aliran dan loncatan hidraulik dapat meningkatkan tegangan geser pada dasar. Hal ini menyebabkan pelepasan dan pengangkutan butiran sedimen. Ukuran butir juga berpengaruh terhadap perkembangan gerusan, dimana penurunan ukuran butir sedimen cenderung meningkatkan kedalaman gerusan maksimum (Fathi, *et al.*, 2024). Maka, keberadaan material dasar berpasir, khususnya pasir berbutir halus, dapat meningkatkan kerentanan dasar sungai terhadap gerusan lokal di hilir bendung. Sehingga perlu dilakukan analisis gerusan yang lebih mendalam untuk mengetahui dampaknya terhadap struktur bendung (Fathi, *et al.*, 2024).

Salah satu solusi yang diusulkan adalah pemasangan bronjong di bagian hilir bendung setelah kolam olak dan peredam energi. Bronjong merupakan solusi perkuatan struktural yang fleksibel dan efektif untuk mengatasi longsoran dangkal, tahan terhadap gaya horizontal dan vertikal, serta dapat mengalirkan air (Daneshfaraz *et al.*, 2025). Selain itu, material bronjong dapat digunakan kembali setelah keruntuhan, menjadikannya pilihan ideal untuk konstruksi perkuatan (Hamdhan and Eliza, 2023). Meskipun solusi ini menjanjikan, dimensi bronjong yang tepat

untuk mengurangi gerusan lokal secara efektif dan efisien belum dapat ditentukan secara pasti, sehingga perlu dilakukan analisis yang lebih lanjut (Mohammadnezhad *et al.*, 2026).

Sejumlah kajian terdahulu telah membahas gerusan lokal di hilir bangunan pelimpah menunjukkan secara eksperimental bahwa peningkatan debit serta penurunan kedalaman air hilir dan ukuran butir material dasar menyebabkan bertambahnya kedalaman gerusan maksimum (Fathi, *et al.*, 2024). (Pangestu & Astuti, 2018) juga memperoleh hasil bahwa semakin besar debit, semakin besar kedalaman gerusan di hilir bendung dengan kolam olak tipe Vlughter, sedangkan perlindungan *groundsill* hanya mereduksi kedalaman gerusan sekitar 9–13%. Di sisi lain, (Kiraga and Popek, 2020) menyatakan bahwa para peneliti belum sepakat mengenai parameter yang memengaruhi besar dan intensitas pembentukan gerusan lokal sehingga rumus empiris perlu diverifikasi terhadap kondisi lapangan. Perkembangan terkini lebih banyak diarahkan pada peningkatan akurasi prediksi kedalaman gerusan dengan model berbasis data, misalnya metode permukaan respons orde tinggi (Hameed *et al.*, 2024), serta pada upaya perlindungan dasar menggunakan bronjong dan riprap (Daneshfaraz *et al.*, 2025; Mohammadnezhad, Mohammadi and Ghaderi, 2026). Namun, kajian-kajian tersebut umumnya memprediksi atau memitigasi gerusan pada debit yang telah ditetapkan dan belum memperlakukan debit limpasan sebagai variabel keputusan yang dioptimasi. Oleh karena itu, kebaruan penelitian ini terletak pada pengintegrasian debit banjir rencana HSS Nakayasu kala ulang 25, 50, dan 100 tahun dengan parameter hidraulik hilir (kecepatan aliran dan tinggi loncatan air) serta tiga metode estimasi gerusan (Lacey, Wu, dan Veronese) ke dalam model program linier untuk menentukan debit limpasan optimum pada bendung karet dan metode estimasi gerusan yang paling sesuai.

Permasalahan utama dalam penelitian ini adalah minimnya kajian terkait optimasi debit limpasan pada bendung karet dengan mempertimbangkan variasi kala ulang yang berbeda dan penggunaan berbagai metode analisis gerusan secara bersamaan. Hal ini berpotensi meningkatkan risiko erosi dan kerusakan struktur bendung, terutama pada daerah hilir bendung yang rentan terhadap gerusan lokal (Kiraga *et al.*, 2025).

Hipotesis dalam penelitian ini adalah bahwa peningkatan debit limpasan dan variasi kala ulang dapat memperburuk gerusan lokal di bagian hilir Bendung Karet Sungai Juwana, yang pada gilirannya dapat mengurangi stabilitas struktur bendung. Selain itu, penggunaan beberapa metode

analisis gerusan secara bersamaan, termasuk metode Lacey, Wu, dan Veronese yang dapat memberikan gambaran yang lebih akurat tentang potensi gerusan lokal dibandingkan dengan penggunaan satu metode saja. Hipotesis ini diuji dengan mengoptimalkan debit limpasan serta menganalisis dampak dari berbagai metode terhadap kedalaman gerusan lokal.

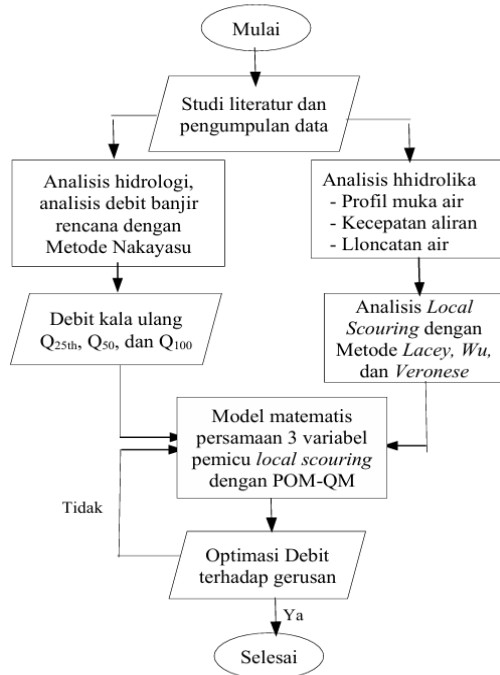
Berdasarkan hipotesis tersebut, diharapkan bahwa pemasangan bronjong pada bagian hilir bendung setelah kolam olak dan peredam energi dapat mengurangi dampak negatif dari gerusan lokal dan meningkatkan stabilitas struktur bendung. Oleh karena itu, penelitian ini juga menguji dimensi bronjong yang paling efektif untuk mengatasi gerusan lokal berdasarkan variasi debit limpasan dan kala ulang.

Hasil penelitian ini untuk memberikan solusi yang lebih tepat dan praktis untuk pengelolaan bendung karet di Sungai Juwana dan mengurangi risiko kerusakan yang ditimbulkan oleh erosi (Hameed *et al.*, 2024). Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk mengoptimalkan debit limpasan pada Bendung Karet Sungai Juwana dengan mempertimbangkan variasi kala ulang untuk mengurangi gerusan lokal yang dapat merusak struktur bendung. Selain itu, penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi signifikan dalam pengelolaan bendung karet, khususnya dalam mengurangi risiko erosi dan kerusakan struktur bendung akibat gerusan lokal. Dengan mempertimbangkan faktor-faktor seperti debit limpasan, variasi kala ulang, dan penggunaan metode analisis yang lebih komprehensif, penelitian ini dapat memberikan solusi praktis untuk meningkatkan efisiensi operasi bendung dan memperpanjang umur struktural bendung karet. Secara khusus, penelitian ini juga bertujuan menentukan metode estimasi gerusan (Lacey, Wu, atau Veronese) yang paling sesuai berdasarkan debit limpasan hasil optimasi program linier.

Metode

Proses analisis ini melibatkan dua bidang keahlian yaitu analisis hidrologi dan analisis hidrolika. Dalam proses analisis hidrologi sebagai dasar pertimbangan, diperlukan beberapa analisis, meliputi curah hujan, uji kecocokan distribusi dan intensitas curah hujan terlebih dahulu guna mendapatkan debit banjir rencana atau juga bisa disebut sebagai debit limpasan seperti pada diagram Gambar 2. Debit limpasan yang digunakan berdasarkan perhitungan Hidrograf Satuan Sintetis (HSS) Nakayasu. Hidrograf Nakayasu ini merupakan bentuk hidrograf sintetis dengan dasar

observasi dan *research* di beberapa sungai (Dewi *et al.*, 2016).



Gambar 2. Diagram alir analisis dan optimasi debit limpasan

Metode tersebut juga telah banyak digunakan dalam menganalisa debit limpasan yang terjadi pada daerah aliran sungai yang ada di Indonesia. Pada proses analisa ini menerapkan kombinasi metode-metode analisis gerusan dengan mendapatkan hasil yang akurat dalam menilai potensi kerusakan akibat gerusan pada bagian hilir bendung. Metode analisis yang digunakan yaitu Metode Lacey, Metode Wu dan Metode Veronese. Ketiga metode tersebut di optimalisasi dengan mempertimbangkan tiga variabel yaitu, debit banjir rencana (Q_{25th} , Q_{50th} , dan Q_{100th}), kecepatan aliran, dan tinggi loncatan air di hilir setelah menabrak peredam energi. Debit banjir rencana merupakan suatu nilai debit maksimum di sungai berdasarkan periode ulang tertentu (Tubagus dan Aumarauw, 2023).

Pendekatan integratif merupakan penggabungan beberapa tahapan analisis yang saling berkaitan untuk memperoleh evaluasi sistem secara komprehensif (Kashif *et al.*, 2025). Pendekatan integratif yang mencakup analisis hidrologi dan geoteknik secara bersamaan, menggunakan teknologi perangkat lunak untuk memberikan hasil yang lebih akurat dan efisien dalam perencanaan bendung. Sebagai dasar proses optimasi, pemodelan matematis dengan metode program linier (*linear programming*). Metode ini merupakan teknik pengambilan keputusan dalam mengalokasikan sumber daya yang terbatas untuk mencapai tujuan

memaksimalkan keuntungan (Nurmayanti and Sudrajat, 2021).

Program linier dibutuhkan dalam pengoperasian *software* POM-QM. Penggunaan *software* POM-QM dalam simulasi untuk menentukan debit limpasan yang optimal, sehingga dapat meminimalkan potensi erosi dan menjaga kestabilan struktur bendung (Mirzaee *et al.*, 2023). *Software* tersebut merupakan produk dari *Prentice Hall* dan dapat di *install* pada *smartphone* dan komputer untuk membantu dalam pengambilan Keputusan terkait permasalahan optimasi (Astutik *et al.*, 2022). Besarnya debit puncak dengan Metode Hidrograf Nakayasu dapat dihitung dengan Persamaan 1 (Soemarto, 1987).

$$Q_p = \frac{A \cdot R_0}{3,6 \cdot (0,3T_p + T_{0,3})} \quad (1)$$

Dimana; Q_p adalah debit puncak banjir ($m^3/dt/mm$), A adalah luas daerah aliran sungai sampai ke *outlet* (km^2), R_0 adalah curah hujan (mm), T_p adalah tenggang waktu dari permulaan hujan sampai puncak hidrograf satuan (jam), dan $T_{0,3}$ adalah waktu yang diperlukan oleh penurunan debit menjadi 30% dari debit puncak hidrograf (jam).

Perlu diperhitungkan terkait nilai koefisien limpasan melalui pendekatan dari Persamaan 2. Koefisien limpasan merupakan suatu nilai yang merepresntasikan suatu perbandingan antara besarnya aliran permukaan yang terjadi sebagai akibat hujan yang jatuh terhadap volume curah hujan tersebut (Krisnayanti, 2018).

$$C_w = 1,77 \left(\frac{h_1}{H} \right) + 1,05 \quad (2)$$

Dengan, C_w adalah koefisien limpasan ($m^{1/2}/s$), h_1 adalah tinggi pembendungan maksimum (m), dan H adalah tinggi mercu bendung (m). Selanjutnya nilai debit rencana pada Persamaan 1 dianalisis untuk mendapatkan tinggi muka air di atas mercu. Analisis menggunakan Persamaan 3, dimana Q_w adalah debit limpasan pada pembendungan (m^3/s). L adalah panjang bentang bendung (m).

$$Q_w = C_w \cdot L \cdot h_1^{\frac{3}{2}} \quad (3)$$

$$B_e = B - 2(n \times K_p + K_a)h_1 \quad (4)$$

$$Q = \frac{2}{3} \times C_d \times B_e \times H_1^{1,5} \sqrt{\left(\frac{2}{3} \right) g} \quad (5)$$

$$A = B_e (H + H_1) \quad (6)$$

$$V_a = \frac{Q}{A} \quad (7)$$

Berdasarkan nilai tinggi pembendungan (h_1) dapat dihitung lebar mercu bendung dengan Persamaan 4. Analisis tinggi pembendungan maksimum (H_1) dengan mempertimbangkan ambang pendek dengan pengontrol segi empat, menggunakan Persamaan 5

(Kementrian PUPR, 2013). Untuk mendapatkan nilai kecepatan aliran kemudian dilakukan perhitungan dengan Persamaan 6 dan Persamaan 7. Dimana B_e adalah lebar efektif bendung (m), B adalah lebar netto (m), n adalah banyak nya pilar, K_p dan K_a adalah koefisien kontraksi pilar, C_d adalah koefisien debit (h_1/L), g adalah percepatan gravitasi (m/s^2), A adalah luas penampang basah (m^2), H adalah tinggi mercu bendung (m), dan V_a adalah kecepatan aliran (m/s).

Ketinggian air di atas mercu (H_d) dapat dihitung menggunakan Persamaan 8. Perhitungan kecepatan aliran ketika melimpas dari mercu bendung dilakukan dengan Persamaan (9), dengan V_1 adalah kecepatan aliran paska melimpas dari mercu bendung (m/s), dan z adalah beda elevasi air di atas mercu dan kolam olak (m)

$$H_d = H_1 - \left(\frac{V_a^2}{2g} \right) \quad (8)$$

$$V_1 = \sqrt{2g \left(\frac{1}{2} H_d + z \right)} \quad (9)$$

Dengan diketahui nilai kecepatan aliran maka untuk menghitung nilai tinggi loncatan air (y_1) dapat menggunakan Persamaan 10. Bilangan Froud (Fr) dapat diperhitungkan dengan Persamaan (11). Bilangan Froude merupakan parameter tak berdimensi yang menggambarkan perbandingan antara pengaruh gaya inersia dan gaya gravitasi pada aliran serta digunakan untuk menentukan rezim aliran pada saluran terbuka (Legleiter *et al.*, 2025). Perhitungan bilangan Fr ini sebagai salah satu komponen penentu tinggi loncatan air di bagian hilir bendung. Tinggi loncatan air di bagian hilir bendung setelah menabrak peredam energi (y_2) dirhitung dengan Persamaan 12.

$$Q = V \cdot B_{eff} \cdot y_1 \quad (10)$$

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{g \cdot y}} \quad (11)$$

$$y_2 = \frac{1}{2} y_1 [\sqrt{1 + 8Fr^2} - 1] \quad (12)$$

Analisis gerusan lokal ditinjau dengan tiga metode yaitu, Metode Lacey, Wu dan Veronese (Huda *et al.*, 2023). Untuk Metode Lacey dihitung dengan mempertimbangkan posisi gerusan terjadi pada hilir dari kolam olak (Pangestu & Astuti, 2018), yaitu menggunakan Persamaan 13. Selanjutnya Metode Wu, dengan Persamaan 14 dan Metode Veronese dengan Persamaan 15, yang merupakan metode yang memiliki estimasi keterikatan antara lubang gerusan di hilir akibat luncuran aliran (Ghotbi *et al.*, 2017).

$$R = 0,47 \left(\frac{Q}{f} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (13)$$

$$d_s = 1,18x H^{0,235} x q^{0,51} \quad (14)$$

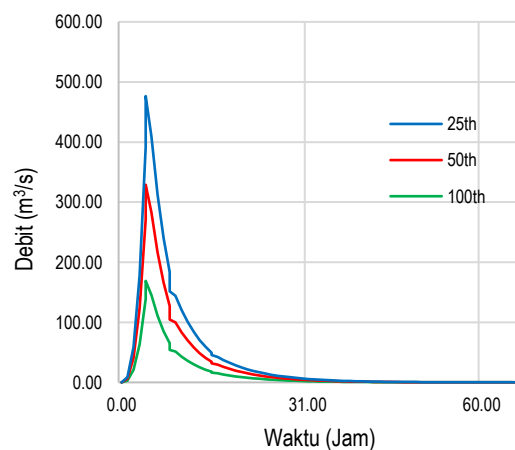
$$d_s = 1,90x H^{0,225} x q^{0,54} \quad (15)$$

Dimana, Q adalah debit limpasan (m^3/s), f adalah faktor lumpur Lacey, d_s adalah kedalaman gerusan (m), H adalah perbedaan tinggi muka air di hilir saluran (m), dan q adalah debit persatuan lebar saluran ($m^3/s^2/m$).

Setelah mendapatkan nilai-nilai variabel tersebut, kemudian dilakukan pencarian nilai debit yang optimum agar gerusan di hilir bendung dapat juga dioptimalkan. Proses optimasi menggunakan konsep persamaan linear. Persamaan tersebut merupakan suatu metode untuk menyelesaikan masalah optimasi dari fungsi tujuan dan batasan yang dipengaruhi oleh suatu variabel hasil keputusan (Nurmayanti and Sudrajat, 2021). Dari debit yang optimum berdasarkan analisa *software* POM-QM, maka akan didapatkan nilai optimasi yang kemudian menjadi rekomendasi suatu metode untuk menganalisis gerusan lokal (*local scouring*) yang terjadi.

Hasil dan Pembahasan

Hasil analisis hidrologi menunjukkan bahwa peningkatan kala ulang menghasilkan peningkatan debit banjir rencana pada DAS Sungai Juwana. Berdasarkan Hidrograf Satuan Sintetis (HSS) Nakayasu, diperoleh debit banjir rencana sebesar 136,73 m^3/s untuk kala ulang 25 tahun, 148,53 m^3/s untuk kala ulang 50 tahun, dan 156,80 m^3/s untuk kala ulang 100 tahun (Gambar 3).



Gambar 3. Hidrograf Nakayasu

Peningkatan debit tersebut menunjukkan bertambahnya potensi energi aliran yang harus dialirkan melalui Bendung Karet Sungai Juwana. Selanjutnya, juga berpengaruh terhadap karakteristik hidraulik di bagian hilir, terutama kecepatan aliran, tinggi loncatan hidraulik, serta potensi kedalaman gerusan lokal (*local scouring*). Oleh karena itu, hasil analisis hidrologi tidak hanya digunakan sebagai debit masukan dalam analisis hidraulika, tetapi juga menjadi dasar untuk

mengevaluasi sensitivitas gerusan terhadap perubahan debit pada berbagai kala ulang.

Kontribusi penelitian ini terletak pada pengintegrasian debit banjir rencana hasil analisis hidrologi dengan parameter hidraulik dan estimasi gerusan menggunakan tiga pendekatan, yaitu Lacey, Wu, dan Veronese, yang selanjutnya digunakan dalam proses optimasi debit limpasan. Pendekatan terintegrasi tersebut memungkinkan hubungan antara tingkat kejadian banjir, respons hidraulik bendung, dan potensi gerusan hilir dievaluasi secara lebih sistematis sehingga dapat menjadi dasar dalam menentukan kondisi operasi bendung yang lebih aman terhadap risiko gerusan.

Hasil dari analisis hidrologi diperoleh nilai curah hujan rencana $R_{25th}=136,22$ mm, $R_{50th}=144,49$ mm dan $R_{100th}=152,53$ mm. Nilai koefisien pengaliran gabungan, $C_{gabungan}=0,41$ waktu konsentrasi $t_r=3$ jam dan kriteria parameter $\alpha=1,5$. Selanjutnya menggunakan Metode Nakayasu (Persamaan 1). didapat debit rencana dengan kala ulang berturut-turut $Q_{25th} = 136,73$ m³/s, $Q_{50th} = 148,53$ m³/s dan $Q_{100th} = 156,80$ m³/s.

Debit limpasan maksimum

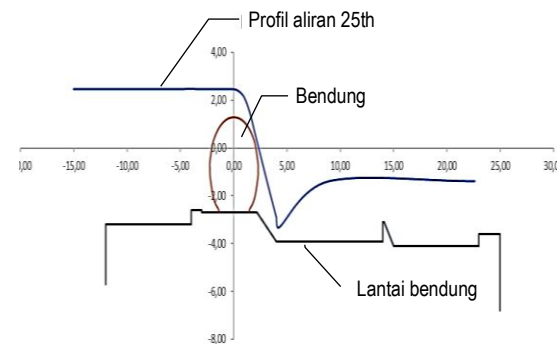
Debit maksimum sebagai pengontrol batas maksimal debit dari hasil optimasi. Sebelum itu, perlu dihitung koefisien limpasan menggunakan Persamaan 2 dengan terlebih dahulu menghitung nilai tinggi pembendungan, h_1 dan didapat nilai C_w sebesar 1,58. Dengan Persamaan 3 diperoleh debit limpasan, $Q_w = 1,58 \times 50 \times 1,2^{\frac{3}{2}} = 103,91 \frac{m^3}{s}$, dan karena terdapat 2 panel limpasan dengan 1 pilar ditengahnya sebagai pembatas, maka debit tersebut setiap panelnya sebesar 51,955 m³/s.

Tinggi air pada mercu bendung

Terkait dengan perhitungan tinggi air di atas mercu bendung ada hal yang harus diperhatikan yaitu tinggi energi di atas mercu. Sehingga sebagai dasar tambahan perhitungan, diperlukan nilai lebar efektifnya dengan lebar efektif bendung sebesar 72,72 m, jumlah pilar 1 buah dengan lebar 2m, $K_p=0,01$ dan $K_a=0,1$. Sehingga dengan Persamaan 4 didapat $B_e = 72,72 - 0,22h_1$ dan dengan Persamaan 5 nilai h_1 untuk debit $Q_{25th} = 136,73$ m³/s adalah 1,049 m. Tinggi energi di hilir mercu, dengan tinggi mercu 4,00 m adalah sebesar 2,349, maka didapatkan lebar efektif bendung B_e sebesar 72,489 m. Kecepatan aliran sebagai salah satu variable dalam optimasi, dihitung menggunakan Persamaan 6 dan 7, yaitu $V_a = \frac{136,73}{365,98} = 0,37$ m/s, dan dengan Persamaan (8) dihasilkan ketinggian air di atas mercu $H_d=1,04$ m.

Tinggi loncatan air

Untuk menghitung tinggi loncatan awal aliran sangat bergantung pada nilai kecepatan aliran sesaat setelah melewati ujung mercu maka diperhitungkan menggunakan Persamaan 9 yang menghasilkan $V_1=9,506$ m/s. Kecepatan tersebut nantinya digunakan dalam mencari nilai tinggi loncatan awal (y_1). Untuk mengetahui tinggi loncatan air dengan debit $Q_{25th} = 136,73$ m³/s, $V_1 = 9,506$ m/s dan $B_{eff} = 72,48$ m maka selanjutnya dengan Persamaan 11, didapat $y_1 = 0,198$ m.



Gambar 4. Sketsa aliran pada bendung

Gambar 4 adalah kondisi aliran ketika terjadi debit maksimum di hulu dan *backwater* air laut dengan elevasi maksimum di hilir, sehingga bendung karet tidak memungkinkan dikempeskan. Hal tersebut termasuk dalam rencana pola operasi, karena dapat menyebabkan bercampurnya air payau dengan air tawar yang mengganggu kegiatan pola operasi bendung. Dengan kondisi tersebut, dipastikan terjadi loncatan aliran akibat adanya peredam energi dan secara otomatis terjadi perbedaan kecepatan aliran, sehingga perlu dilakukan perhitungan nilai *Froude Number* (*Fr*) dan tinggi loncatan ke-2. Dengan Persamaan 12 didapat $Fr = 6,814$ (aliran superkritik) dan dengan Persamaan 13 didapat $y_2=1,82$ m.

Untuk kecepatan sebesar 9,506 m/s dan tinggi loncatan awal 0,198 m, tentu berpotensi terjadinya suatu gerusan, sehingga terdapat peredam energi yang membantu mengurangi kecepatan aliran. Dari situ perlu dilakukan analisis lebih lanjut terkait tinggi loncatan aliran di hilir bendung. Untuk menghitung tinggi loncatan di hilir bendung, y_3 dihitung dengan Persamaan 13 dan didapat $y_3= 1,82$ m.

Kedalaman gerusan lokal (*local scouring*)

Kedalaman gerusan dianalisis dengan tiga metode yaitu Metode Lacey, Wu dan Veronese. Untuk Metode Lacey dengan Persamaan 13, Metode Wu dengan Persamaan 14 dan Metode Veronese dengan Persamaan 15 sebagai berikut:

$$R = 0,473 \left(\frac{136,73}{1,76 \times 0,003212} \right)^{\frac{1}{3}} = 5,255 \text{ m}$$

$$d_s = 1,18 \times 1,815^{0,235} \times 1,89^{0,51} = 1,876 \text{ m}$$

$$d_s = 1,9 \times 1,815^{0,225} \times 1,89^{0,54} = 3,061 \text{ m}$$

Dari ketiga persamaan tersebut didapatkan rata-rata gerusan yang terjadi dari debit kala ulang rencana $Q_{25th} = 136,73 \text{ m}^3/\text{s}$ adalah sebesar 3,397 m. Tabel 1 menunjukkan hubungan antara kala ulang rencana, debit, debit per satuan lebar (q), dan kedalaman gerusan lokal pada Bendung Karet Sungai Juwana, yang dihitung menggunakan metode Lacey. Pada Tabel 1 tersebut menunjukkan peningkatan debit aliran dan q seiring dengan bertambahnya kala ulang.

Tabel 1. Hubungan antara debit dengan kedalaman *local scouring* menggunakan Metode Lacey

Kala ulang (tahun)	Debit (m^3/s)	q ($\text{m}^3/\text{s}/\text{m}$)	M. Lacey (m)
25	136,73	1,89	5,255
50	148,53	2,05	5,402
100	156,80	2,16	5,500

Debit meningkat dari $136,73 \text{ m}^3/\text{s}$ pada kala ulang 25 tahun menjadi $156,80 \text{ m}^3/\text{s}$ pada kala ulang 100 tahun, sementara q juga meningkat dari $1,89 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$ menjadi $2,16 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$. Kedalaman gerusan lokal meningkat secara proporsional, yaitu 5,255 m pada kala ulang 25 tahun, 5,402 m pada kala ulang 50 tahun, dan 5,500 m pada kala ulang 100 tahun. Peningkatan debit dan q tersebut berpotensi menyebabkan gerusan lokal yang lebih dalam, yang dapat mengancam stabilitas struktur bendung dan tepi sungai. Kecenderungan ini sejalan dengan hasil eksperimen (Fathi, *et al.*, 2024) yang menunjukkan bahwa peningkatan debit menyebabkan bertambahnya kedalaman gerusan maksimum di hilir pelimpah, serta hasil uji model fisik (Pangestu & Astuti, 2018) pada bendung dengan kolam olak tipe Vlughter yang menunjukkan bahwa semakin besar debit aliran, semakin besar pula kedalaman gerusan.

Tabel 2. Hubungan Hubungan antara kala ulang rencana dengan kedalaman *local scouring* menggunakan Metode Wu

Kala ulang (tahun)	Debit (m^3/s)	q ($\text{m}^3/\text{s}/\text{m}$)	M.Wu (m)
25	136,73	1,89	1,876
50	148,53	2,05	1,975
100	156,80	2,16	2,042

Tabel 2 menunjukkan hubungan antara kala ulang rencana, debit, debit per satuan lebar, dan kedalaman gerusan lokal yang dihitung menggunakan metode Wu. Data untuk tiga kala

ulang menunjukkan bahwa seiring dengan peningkatan kala ulang, debit aliran dan nilai q juga meningkat. Debit meningkat dari $136,73 \text{ m}^3/\text{s}$ pada kala ulang 25 tahun menjadi $156,80 \text{ m}^3/\text{s}$ pada kala ulang 100 tahun, sementara q meningkat dari $1,89 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$ menjadi $2,16 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$. Kedalaman gerusan lokal, yang dihitung dengan metode Wu, juga meningkat seiring dengan peningkatan debit dan q, yaitu 1,876 m pada kala ulang 25 tahun, 1,975 m pada kala ulang 50 tahun, dan 2,042 m pada kala ulang 100 tahun. Hal ini menunjukkan bahwa semakin besar debit dan kerapatan aliran, semakin dalam gerusan lokal yang terjadi, yang dapat mempengaruhi stabilitas struktur bendung dan tepi sungai. Tabel 3 menunjukkan hubungan antara kala ulang rencana, debit, debit per satuan lebar, dan kedalaman gerusan lokal yang dihitung menggunakan metode Veronese. Debit aliran meningkat seiring dengan bertambahnya kala ulang, dari $136,73 \text{ m}^3/\text{s}$ pada kala ulang 25 tahun menjadi $156,80 \text{ m}^3/\text{s}$ pada kala ulang 100 tahun.

Tabel 3. Hubungan antara kala ulang rencana terhadap kedalaman *local scouring* menggunakan Metode Veronese

Kala ulang (tahun)	Debit (m^3/s)	q ($\text{m}^3/\text{s}/\text{m}$)	M.Veronese (m)
25	136,73	1,89	3,061
50	148,53	2,05	3,229
100	156,80	2,16	3,343

Nilai q juga meningkat, dari $1,89 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$ pada kala ulang 25 tahun menjadi $2,16 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$ pada kala ulang 100 tahun. Kedalaman gerusan lokal, yang dihitung dengan metode Veronese, meningkat seiring dengan peningkatan debit dan q, yaitu 3,061 m pada kala ulang 25 tahun, 3,229 m pada kala ulang 50 tahun, dan 3,343 m pada kala ulang 100 tahun. Hal ini menunjukkan bahwa semakin besar debit dan kerapatan aliran, semakin dalam gerusan lokal yang terjadi, yang berpotensi mempengaruhi stabilitas struktur bendung dan tepi sungai.

Program linier

Hal yang terpenting dalam program linear adalah penentuan variable-variabel serta batasan-batasannya. Untuk memudahkan identifikasi komponen-komponen tersebut maka perlu diklasifikasikan sebagai Tabel 4.

Tabel 4. Variabel dan batasan yang digunakan saat optimasi

Kala ulang (tahun)	Gerusan (m)	Kecepatan V_2 (m/s)	Tinggi loncat, y_2 (m)	Debit (m^3/s)
25	5,255	7,90	1,82	136,73
50	5,402	7,79	1,89	148,53
100	5,500	7,72	1,93	156,80

Dari Tabel 4 menunjukkan variabel batasan yang digunakan dalam optimasi gerusan lokal pada tiga nilai kala ulang: 25 tahun, 50 tahun, dan 100 tahun. Kedalaman gerusan lokal meningkat seiring dengan bertambahnya kala ulang, yaitu 5,255 m pada kala ulang 25 tahun, 5,402 m pada kala ulang 50 tahun, dan 5,500 m pada kala ulang 100 tahun. Kecepatan aliran sedikit menurun, dari 7,90 m/s pada kala ulang 25 tahun menjadi 7,72 m/s pada kala ulang 100 tahun. Tinggi loncatan air juga meningkat, yaitu 1,82 m pada kala ulang 25 tahun menjadi 1,93 m pada kala ulang 100 tahun.

Debit meningkat seiring dengan bertambahnya kala ulang, yaitu 136,73 m³/s pada kala ulang 25 tahun, 148,53 m³/s pada kala ulang 50 tahun, dan 156,80 m³/s pada kala ulang 100 tahun. Secara keseluruhan, pada Tabel 4 ini menunjukkan hubungan antara peningkatan kala ulang dengan peningkatan gerusan lokal, tinggi loncatan air, dan debit, yang penting untuk perencanaan dan pengelolaan bendung serta meminimalkan dampak kerusakan akibat gerusan lokal. Guna meminimalkan debit limpasan sebagai penyebab gerusan maka dapat dimodelkan dengan Persamaan 16, sehingga dengan batasan-batasan berikut nantinya debit optimal yang terjadi dapat ditentukan.

$$Z = 136,73X_1 + 148,53X_2 + 156,80X_3 \quad (16)$$

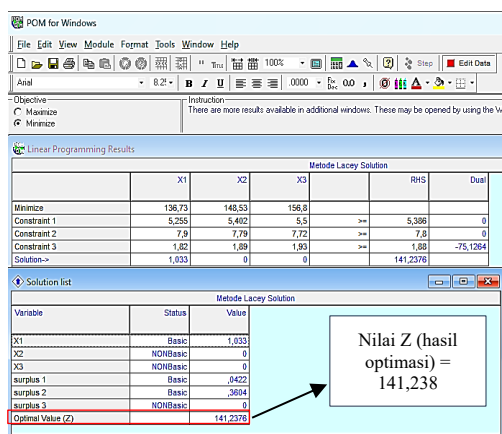
$$5,255X_1 + 5,402X_2 + 5,500X_3 \geq 5,386 \quad (17)$$

$$7,90X_1 + 7,79X_2 + 7,72X_3 \geq 7,80 \quad (18)$$

$$1,82X_1 + 1,89X_2 + 1,93X_3 \geq 1,88 \quad (19)$$

dengan syarat : X_1, X_2 , dan $X_3 \geq 0$

Berdasarkan hasil *running* dari *software* POM-QM pada Gambar 5 didapat nilai Z (debit limpasan) sebagai hasil optimasi yaitu sebesar 141,238 m³/s pada Metode Lacey. Hal serupa dilakukan untuk menganalisis Metode Wu dan Metode Veronese dengan menyesuaikan Persamaan 16 berdasarkan Tabel 2 dan 3, sehingga hasil optimasi dapat direkap pada Tabel 5.



Metode Lacey Solution					
	X1	X2	X3	RHS	Dual
Minimize	136,73	148,53	156,80		
Constraint 1	5,255	5,402	5,5	>=	5,386
Constraint 2	7,9	7,79	7,72	>=	7,8
Constraint 3	1,82	1,89	1,93	>=	1,88
Solution-->	1,033	0	0		141,2376

Metode Lacey Solution		
Variable	Status	Value
X1	Basic	1,033
X2	NONBasic	0
X3	NONBasic	0
surplus 1	Basic	,0422
surplus 2	Basic	,3094
surplus 3	NONBasic	0
Optimal Value (Z)		141,2376

Gambar 5. Hasil optimasi Metode Lacey

Terlihat bahwa debit hasil optimasi Z memiliki nilai yang berdekatan antara Metode Wu dan Veronese. Tabel 5 menunjukkan hasil optimasi debit terhadap tinggi gerusan lokal menggunakan tiga metode: Lacey, Wu, dan Veronese pada tiga kala ulang yang berbeda: 25 tahun, 50 tahun, dan 100 tahun. Kedalaman gerusan pada metode Lacey meningkat dari 5,255 m pada kala ulang 25 tahun menjadi 5,500 m pada kala ulang 100 tahun. Metode Wu menghasilkan kedalaman gerusan yang lebih rendah, yaitu 1,876 m pada kala ulang 25 tahun dan meningkat menjadi 2,042 m pada kala ulang 100 tahun.

Tabel 5. Hasil Optimasi nilai debit terhadap tinggi gerusan pada masing-masing metode

Kala ulang (tahun)	Lacey (m)	Wu (m)	Veronese (m)
25	5,255	1,876	3,061
50	5,402	1,975	3,229
100	5,500	2,042	3,343
Z (m ³ /s)	141,238	143,144	143,430

Sementara itu, metode Veronese menghasilkan kedalaman gerusan yang lebih tinggi, yaitu 3,061 m pada kala ulang 25 tahun dan meningkat menjadi 3,343 m pada kala ulang 100 tahun. Nilai Z menunjukkan hasil optimasi total untuk masing-masing metode: 141,238 m³/s untuk Lacey, 143,144 m³/s untuk Wu, dan 143,430 m³/s untuk Veronese. Tabel 5 memberikan gambaran perbandingan kedalaman gerusan yang dihitung dengan metode yang berbeda yang penting untuk perencanaan dan pengelolaan bendung atau struktur sungai lainnya.

Perbedaan hasil antar metode cukup besar, yaitu 1,876 m (Wu), 3,061 m (Veronese), dan 5,255 m (Lacey) pada kala ulang 25 tahun, atau nilai Metode Lacey hampir tiga kali nilai Metode Wu. Hal ini menunjukkan bahwa estimasi kedalaman gerusan sangat bergantung pada rumus empiris yang digunakan. Temuan tersebut sejalan dengan (Kiraga and Popek, 2020) yang menyatakan bahwa belum terdapat kesepakatan mengenai parameter yang memengaruhi besar gerusan lokal sehingga rumus empiris perlu diverifikasi dan dioptimasi terhadap data laboratorium maupun lapangan. (Hameed, *et al.*, (2024) juga menunjukkan bahwa model permukaan respons orde tinggi memberikan prediksi kedalaman gerusan di hilir bendung yang lebih akurat dibandingkan model jaringan saraf tiruan, yang menegaskan bahwa ketidakpastian prediksi gerusan masih menjadi isu penting. Selain itu, (Kiraga, *et al.*, 2025) melaporkan bahwa gerusan di hilir bendung berkembang melalui fase inisiasi, pertumbuhan intensif, stabilisasi, dan keseimbangan, dengan panjang lubang gerusan yang terus bertambah meskipun kedalamannya telah stabil. Dengan demikian, kedalaman gerusan

hasil perhitungan dalam penelitian ini perlu dipandang sebagai nilai estimasi yang sebaiknya diverifikasi dengan pengukuran batimetri di hilir Bendung Karet Sungai Juwana.

Meskipun Metode Wu menghasilkan kedalaman gerusan terkecil, nilai gerusan sebesar 1,876–2,042 m tetap berpotensi mengganggu stabilitas bendung sehingga perlindungan dasar di hilir kolam olak tetap diperlukan.

Kesimpulan

Penelitian ini menghitung debit rencana Sungai Juwana dengan HSS Nakayasu, yaitu 136,73 m³/s (kala ulang 25 tahun), 148,53 m³/s (50 tahun), dan 156,80 m³/s (100 tahun). Kedalaman gerusan lokal di hilir Bendung Karet Sungai Juwana meningkat seiring bertambahnya kala ulang pada ketiga metode : 5,255 – 5,500 m (Lacey), 1,876 – 2,042 m (Wu), dan 3,061 – 3,343 m (Veronese).

Hasil optimasi *linear programming* menunjukan debit optimum sebesar 141,238 m³/s (Lacey), 143, 144 m³/s (Wu), dan 143,430 m³/s (Veronese). Nilai ini merupakan hasil analisis teoritis berdasarkan asumsi dan batasan model. Estimasi gerusan berbeda jauh antar metode. Pada kala ulang 25 tahun, gerusan metode Wu 64,30% lebih kecil dibanding Lacey, dan metode Lacey menghasilkan nilai hampir tiga kali metode Wu. Hal ini menunjukkan bahwa besaran gerusan dipengaruhi oleh rumus empiris yang dipakai. Di antara ketiga metode yang dibandingkan, Wu memberikan estimasi terkecil dan Lacey terbesar (paling konservatif).

Meskipun metode Wu memberikan nilai gerusan terkecil, namun tetap berpotensi mengganggu stabilitas bendung. Sehingga perlindungan dasar di hilir kolam olak tetap diperlukan. Penelitian lanjutan disarankan melakukan pengukuran batimetri hilir bendung dan/atau pemodelan fisik atau numerik untuk memvalidasi ketiga metode.

Ucapan Terima Kasih

Terima kasih kepada tim penelitian yang selama ini telah membantu. Serta rekan kerja yang telah memberi dukungan demi kelancaran penelitian ini.

Daftar Pustaka

Astutik, E. P., Faizah, H., & Wantika, R. R. (2022). Penerapan Case Method Berbantuan Software POM-QM dalam Pembelajaran Program Linier. *FIBONACCI: Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika*, 8(2), 157-164. Available at: <https://doi.org/10.24853/fbc.8.2.157-164>.

Daneshfaraz, R., Mehrivar, E., Aminvash, E., & Rezaie, M. (2025). Experimental investigation of scouring parameters of the downstream bed of simple and gabion rostral drops. *AQUA—Water Infrastructure, Ecosystems and Society*, 74(4), 335-348.

<https://doi.org/10.2166/aqua.2025.275>.

Pangestu, A. D., & Astuti, S. A. Y. (2018). Studi Gerusan di Hilir Bendung Kolam Olak Tipe Vlughter dengan Perlindungan Groundsill. *Teknisia*, 463-473.

Dewi, R., Limantara, L. M., & Soetopo, W. (2016). Analisis Parameter Alfa Hidrograf Satuan Sintetik Nakayasu Di Sub Das Lesti. *Jurnal Teknik Pengairan: Journal of Water Resources Engineering*, 7(1), 107-116.

Fathi, A., Abdi Chooplou, C., & Ghodsian, M. (2024). Local scour downstream of type-A trapezoidal stepped piano key weir in sand and gravel sediments. *ISH Journal of Hydraulic Engineering*, 30(4), 417-429.

<https://doi.org/10.1080/09715010.2024.2353612>.

Ghotbi, S., Abdollahi, A., & Moghadam, M. A. (2017). Three-dimensional numerical modeling of score hole in rectangular side weir with finite volume method, 3(2): 22-31.

[https:// DOI: 10.22055/jhs.2018.24654.1062](https://doi.org/10.22055/jhs.2018.24654.1062)

Hamdhan, I.N. & Eliza, E. (2023). 3D Modeling on Slope Stability Using Gabion Reinforcement with Finite Element-Based Plaxis 3D, *Media Komunikasi Teknik Sipil*, 29(1), 93–102.

<https://doi.org/10.14710/mkts.v29i1.44893>.

Hameed, M. M., Khaleel, F., AlOmar, M. K., Mohd Razali, S. F., AlSaadi, M. A., & Al-Ansari, N. (2024). Introducing high-order response surface method for improving scour depth prediction downstream of weirs. *Applied Water Science*, 14(6), 120.

<https://doi.org/10.1007/s13201-024-02181-8>.

Huda, M. B., Lone, M. A., Rather, N. A., & Chadee, A. A. (2023). Scouring around different shapes of bridge pier. *Water Practice & Technology*, 18(7), 1608-1616.

<https://doi.org/10.2166/wpt.2023.108>.

Kashif, M., Bin, W., Shams, H., Khan, M. J., Metwally, M., Towfek, S. K., & Alharbi, A. H. (2025). Integrated hydrologic-hydraulic modeling framework for flood risk assessment of rural bridge infrastructure in northwestern Pakistan. *Water*, 17(13), 1893.

<https://doi.org/10.3390/w17131893>.

- Kementerian Pekerjaan Umum dan Perumahan Rakyat (2015) *Rencana Strategis BBWS Pemali Juana 2015-2019*.
- Kementrian PUPR (2013) Kriteria Perencanaan Bangunan Utama (KP-02), *Standar Perencanaan Irigasi*, p. 89. Available at: <http://www.nber.org/papers/w16019>.
- Kencanawati, M., Iranata, D., & Maulana, M. A. (2023). Hydrologic modeling system HEC-HMS application for direct runoff determination. *Journal of Human, Earth, and Future*, 4(2), 153-165. <https://doi.org/10.28991/HEF-2023-04-02-02>.
- Kiraga, M., Bajkowski, S., Urbański, J., & Siwicki, P. (2025). Experimental Studies on the Local Scour Development of the Riverbed Below the Piaseczno Weir. *Water*, 17(13), 1916.
- Kiraga, M., & Popek, Z. (2020). On local scouring downstream small water structures. *PeerJ*, 8, e10282. <https://doi.org/10.7717/peerj.10282>.
- Legleiter, C. J., Grant, G., Bae, I., Fasth, B., Yager, E., White, D. C., ... & Dudley, R. (2025). Remote sensing of river discharge based on critical flow theory. *Geophysical Research Letters*, 52(9), e2025GL114851. <https://doi.org/10.1029/2025GL114851>.
- Mahdian Khalili, A., & Hamidi, M. (2026). Effect of Cohesive Sediments in Scour Morphology Downstream of Submerged Sluice Gates. *Infrastructures*, 11(2), 59. <https://doi.org/10.3390/infrastructures11020059>.
- Mirzaee, R., Mohammadi, M., Mousavi, S. F., Bagherzadeh, M., & Hosseini, K. (2023). Application of soft computing techniques to estimate the scouring depth formed by crossing jets. *Water Science & Technology*, 87(8), 1853-1865. <https://doi.org/10.2166/wst.2023.108>.
- Mohammadnezhad, H., Mohammadi, M., & Ghaderi, A. (2026). Riprap mitigation of downstream scour at grade-control structures considering tailwater depth and layer thickness. *Scientific Reports*, 16(1), 1–19. <https://doi.org/10.1038/s41598-026-36776-9>.
- Nurmayanti, L., & Sudrajat, A. (2021). Implementasi linear programming metode simpleks pada home industry khasanah sari karawang. *Jurnal Manajemen*, 13(3), 431-438.
- Sarwono, S. (2016). Studi karakteristik gerusan lokal pada beberapa tipe pilar jembatan. *Jurnal Sumber Daya Air*, 12(1), 89-104. <https://doi.org/10.32679/jsda.v12i1.167>.
- Soemarto, C.D. (1987). *Hidrologi Teknik*. 1st ed. Surabaya: usaha nasional.
- Krisnayanti, D. S. (2018). Analisis nilai koefisien limpasan permukaan pada embung kecil untuk pertanian di pulau flores bagian timur. *Jurnal Sumber Daya Air*, 14(2), pp. 125–145.
- Tubagus, R.D.P., Mananoma, T. & Aumarauw, J.S.. (2023) Evaluasi Kapasitas Tampung Penampang Sungai Kekewuran di Titik Jembatan Perumahan Kharisma Koka Terhadap Debit Banjir Rencana, *Jurnal Tekno*, 21(85), 1767–1777.
- Yosufzai, S., Kadia, S., Ahmad, Z., & Rüther, N. (2025). Experimental study on scouring downstream of a piano key weir with plunge pool. In *Proceedings of the 9th IAHR International Junior Researcher and Engineer Workshop on Hydraulic Structures (IJREWHS 2024)*. ETH Zurich.” <https://doi.org/10.3929/ethz-b-000727192>.
- Zhang, W., Wang, L., Melville, B. W., Guan, D., Whittaker, C. N., & Shamseldin, A. Y. (2022). Characteristics of the flow field within a developing scour hole at a submerged weir. *Journal of Hydraulic Research*, 60(2), 283-294. <https://doi.org/10.1080/00221686.2021.1944928>.
- Zhang, W., Liu, X. and Gan, B. (2024) Experimental Study on Upstream Water Level Rise of Submerged Rock Weirs, *Water (Switzerland)*, 16(15). <https://doi.org/10.3390/w16152136>.