



Pendekatan Sistem Persamaan Diferensial Dua Tundaan untuk Analisis Dinamik Kemacetan di Persimpangan Lalu Lintas

Ahmadi*

Program Studi Teknik Sipil, Fakultas Teknik Desain Inovasi,
Universitas Islam Indonesia, Yogyakarta

^{*)}Email corresponding author: ahmadi@uii.ac.id

Received: 4 Januari 2026 Revised: 9 Agustus 2026 Accepted: 11 Agustus 2026

Abstract

This study aims to analyze the role of congestion propagation, delay time in shaping traffic dynamics and a basis for policy making. The model built is a mathematical model approach in the form of two-delay differential equation system (τ_1, τ_2). Based on this model, we get equilibrium point, basic reproduction number, sensitivity analysis, and numerical simulations. Furthermore, basic reproduction number (R_0) serves a threshold indicator that represents the potential for congestion propagation. When $R_0 > 1$, congestion tends to increase and requires policy intervention, while $R_0 < 1$, traffic remains relatively under control. Furthermore, the results of this study support the implementation of threshold-based policies, such as activating traffic engineering before critical conditions are reached. The simulation results show that τ_1 a significant role in shaping the dynamics of traffic congestion, which is slower but has the potential to increase due to vehicle buildup, while τ_2 in the recovery process makes congestion last longer before subsiding. Additionally, a lower congestion spread rate (β) promotes rapid congestion dissipation, whereas a higher (β), combined with longer time delays, leads to more severe, persistent, and oscillatory congestion. This approach is important because it allows traffic decision-making based on quantitative indicators, rather than the experience of traffic officers in the field.

Keywords: Two-delay differential equation system, traffic congestion

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk melakukan analisis tingkat propagasi kemacetan, waktu tunda dalam membentuk dinamika lalu lintas dan sebagai dasar pengambilan kebijakan. Model yang dibangun merupakan pendekatan model matematika sistem persamaan diferensial dua tundaan (τ_1 dan τ_2). Berdasarkan model tersebut didapatkan titik ekuilibrium, bilangan reproduksi dasar, analisis sensitifitas dan simulasi numerik. Bilangan reproduksi dasar R_0 berfungsi sebagai ambang batas yang merepresentasikan potensi propagasi kemacetan. Ketika $R_0 > 1$, kemacetan cenderung meningkat dan memerlukan intervensi dari sisi kebijakan, sedangkan $R_0 < 1$ lalu lintas masih relatif terkendali. Di sisi lain, hasil penelitian ini mendukung penerapan kebijakan berbasis ambang batas, seperti mengaktifkan rekayasa lalu lintas sebelum kondisi kritis tercapai. Hasil simulasi menunjukkan bahwa waktu tundaan pertama τ_1 berperan penting dalam membentuk dinamika kemacetan lalu lintas yang lambat namun berpotensi meningkat akibat penumpukan kendaraan, sedangkan waktu tundaan kedua τ_2 pada proses pemulihan membuat kemacetan bertahan lebih lama sebelum mereda. Lebih lanjut, laju propagasi kemacetan β kecil, maka kemacetan cepat mereda, sedangkan β besar dan waktu tundaan lama, kemacetan dapat meningkat, bertahan lebih lama, dan menimbulkan osilasi di awal waktu. Di sisi lain, pendekatan ini penting karena memungkinkan pengambilan keputusan lalu lintas yang didasarkan pada indikator kuantitatif, bukan berdasarkan pengalaman petugas lalu lintas yang berada di lapangan.

Kata kunci: Sistem persamaan diferensial dua tundaan, kemacetan lalu lintas

Pendahuluan

Kemacetan lalu lintas merupakan suatu masalah yang terjadi ketika perbandingan ruang jalan dengan kendaraan yang melintas melebihi kapasitas, sehingga menyebabkan kecepatan lebih lambat dan waktu perjalanan lebih lama (Faisal, 2025). Menurut data dari TomTom (2024) yang dipublikasikan pertengahan tahun 2025, Bandung menempati peringkat ke-12 dunia dengan tingkat kemacetan tertinggi di Indonesia. Kemudian berturut-turut diikuti oleh Medan, Palembang, Surabaya dan Jakarta. Data tersebut menunjukkan bahwa kemacetan lalu lintas masih menjadi masalah yang serius di kota besar yang ada di Indonesia. Berdasarkan penelitian yang dipublikasikan oleh Eom & Kim (2020), salah satu penyebab kemacetan yang terjadi adalah adanya persimpangan lampu lalu lintas (persimpangan bersinyal). Persimpangan tersebut sering terjadi *bottleneck* yang membatasi kapasitas jalan, sehingga terjadi penumpukan kendaraan dan terjadi penurunan kinerja lalu lintas secara keseluruhan.

Pengaturan lalu lintas di persimpangan bersinyal memerlukan pengambilan keputusan yang mampu beradaptasi berdasarkan dinamika arus kendaraan *real time*. Akan tetapi, di beberapa kota di Indonesia, pengambilan keputusan dalam pengaturan lalu lintas pada persimpangan bersinyal masih bergantung pada observasi lapangan dan pertimbangan petugas, terutama pada lokasi dengan volume lalu lintas yang tinggi. Pendekatan tersebut memiliki sejumlah keterbatasan karena tidak menjamin optimalitas pengaturan lalu lintas, kurang konsisten dalam proses pengambilan keputusan, serta belum mampu beradaptasi secara efektif terhadap perubahan arus lalu lintas yang bersifat dinamis. Sehingga, diperlukan suatu mekanisme pengambilan keputusan yang didasarkan pada indikator kuantitatif dan terstruktur agar pengaturan lalu lintas dapat dilakukan secara lebih objektif, adaptif, dan efisien.

Di sisi lain, jika ditinjau dari sisi perilaku berkendara, pengendara kendaraan akan selalu memperhatikan kondisi lalu lintas yang berada di depannya (lancar atau macet). Ketika arus lalu lintas di depan mengalami kemacetan, pengendara cenderung mengurangi kecepatan secara bertahap hingga berhenti, terutama saat mendekati persimpangan bersinyal. Waktu pengendara menerima respon saat tahu bahwa arus lalu lintas mengalami kemacetan sampai melakukan pengereman disebut sebagai waktu tundaan. Selain itu, ketika pengendara lolos dari lampu merah, pengendara cenderung berhati-hati dengan berjalan pelan, kemudian mengendarai kendaraannya dengan kecepatan normal (Murat & Cetin, 2019;

Zhao *et al.*, 2015). Proses yang sama akan berulang ketika pengendara kembali menghadapi lampu merah. Meskipun telah kembali berkendara dengan kecepatan normal, pengendara masih dipengaruhi oleh efek *residual* kemacetan, seperti meningkatnya kewaspadaan. Seiring waktu, pengendara kembali memasuki kondisi rentan terhadap kemacetan melalui suatu waktu transisi yang dikenal sebagai waktu tundaan.

Pendekatan berbasis pemodelan matematis dan analisis sistem dinamis memungkinkan karakteristik arus lalu lintas direpresentasikan secara kuantitatif, sehingga perubahan kondisi lalu lintas dapat dianalisis dan direspons secara lebih optimal. Dengan pengembangan model berbasis ambang batas, pada penelitian ini diharapkan menjadikan solusi alternatif terhadap pengaturan secara konvensional, untuk meningkatkan efisiensi dan kinerja sistem lalu lintas perkotaan.

Penelitian tentang model matematika terkait kemacetan lalu lintas telah banyak diteliti, diantaranya oleh Hartono *et al.*, (2018), penelitian tersebut membahas model matematika kemacetan yang ada di Yogyakarta dengan pendekatan sistem Lorentz. Sedangkan penelitian yang dilakukan oleh (Kozhabek *et al.*, 2024; Rafsanjani *et al.*, 2023; Saberi *et al.*, 2020) meneliti tentang kemacetan dengan pendekatan model SIR (*Susceptible-Infected-Recovered*). Model SIR merupakan suatu model yang diadopsi dari model penyebaran penyakit pada populasi manusia. Di sisi lain, penelitian terkait model SIR telah banyak diaplikasikan di berbagai bidang, diantaranya yang telah dilakukan oleh (Ahmadi & Widodo, 2020). Penelitian tersebut mengadopsi model penyebaran penyakit SIRS pada jaringan komputer yang terpapar *malware* dengan mempertimbangkan dua waktu tundaan dari kelas *S* ke *I* dan *R* ke *S*. Penelitian yang dipublikasikan oleh (Bukola *et al.*, 2016; Mishra & Ansari, 2012; Saptaningtyas *et al.*, 2024; Zhang *et al.*, 2016) juga meneliti tentang model SIRS pada komputer. Sedangkan, model SIRS yang dimodifikasi untuk menggambarkan *transmisi informasi* pada struktur jaringan kompleks diteliti oleh (Zhang & Pan, 2021) dan model SIR dapat diaplikasikan pada masalah ekonomi (Mubarez & Mohsini., 2025).

Penelitian-penelitian tersebut masih memiliki beberapa keterbatasan. Sebagian besar model yang dikembangkan berfokus pada dinamika penyebaran kemacetan tanpa mempertimbangkan secara eksplisit waktu tundaan (*time delay*) yang merepresentasikan respons pengendara terhadap perubahan kondisi lalu lintas serta efek residual setelah melewati persimpangan bersinyal. Di sisi lain, perilaku berkendara menunjukkan bahwa

waktu tundaan merupakan salah satu faktor penting yang dapat memengaruhi pembentukan dan perkembangan antrian kendaraan di persimpangan (Qi *et al.*, 2016). Selain itu, penelitian-penelitian terdahulu umumnya berorientasi pada analisis dinamika sistem dan belum mengembangkan indikator kuantitatif yang dapat dimanfaatkan sebagai dasar pengambilan keputusan dalam pengaturan lampu lalu lintas secara adaptif. Penelitian ini mengusulkan model matematika berbasis SIRS dengan waktu tundaan untuk merepresentasikan dinamika kemacetan secara lebih realistis serta menentukan nilai ambang batas sebagai dasar pengaturan adaptif lampu lalu lintas pada persimpangan bersinyal.

Metode

Penelitian ini dimulai dengan pemodelan matematika yang diadopsi dari model epidemiologi SIR dengan pendekatan sistem persamaan diferensial dua waktu tundaan. Model ini merepresentasikan perpindahan kendaraan antar kondisi lalu lintas berdasarkan parameter tertentu dan waktu tundaan dari kelas S ke I dan R ke S . Selanjutnya, model yang didapat, dilakukan analisis dinamik dengan penentuan titik ekuilibrium, bilangan reproduksi dasar serta simulasi numerik Metode Runge Kutta dengan *software Python*. Simulasi dilakukan untuk melakukan kroscek antara analisis matematis yang sudah dilakukan dengan hasil simulasi.

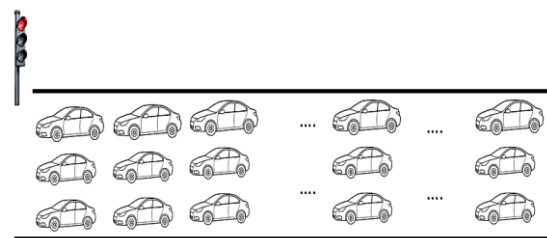
Hasil dan Pembahasan

Kemacetan lalu lintas merupakan salah satu permasalahan utama pada sistem transportasi perkotaan akibat meningkatnya jumlah kendaraan dan kebutuhan mobilitas (Eom & Kim, 2020). Pengendara yang awalnya berkendara dengan nyaman, akan tetapi pada bagian depan menemui arus lalu lintas yang macet. Setelah lampu lalu lintas berubah dari merah ke hijau, kendaraan tidak langsung bergerak dengan kecepatan normal (Gambar 1). Pengendara mengalami fase reaksi dan akselerasi bertahap sehingga kecepatan meningkat secara perlahan hingga mencapai kondisi aliran jenuh. Ilustrasi kemacetan lalu lintas di lampu merah dapat diperhatikan pada Gambar 1.

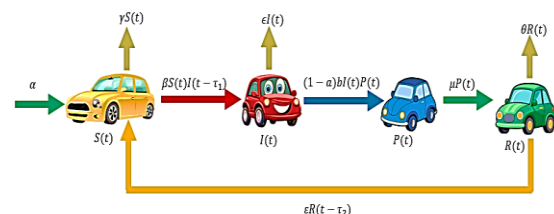
Berdasarkan fakta tersebut, dalam proses pemodelan kemacetan lalu lintas di lampu merah, perlu diperhatikan beberapa komponen, yakni 1) Banyak kendaraan yang berada dalam kondisi rentan (pengendara sudah tahu bahwa lalu lintas di depan ada kemacetan) mengalami kemacetan tanpa mempunyai pengaruh *residual* kemacetan dan memiliki kerentanan untuk mengalami kemacetan dan nilainya berubah seiring waktu $S(t)$, 2)

Kendaraan yang mengalami kemacetan yang berubah seiring waktu $I(t)$, 3) kendaraan yang berjalan pelan karena baru keluar dari kemacetan yang berubah seiring waktu $P(t)$ dan 4) kendaraan yang berjalan normal setelah mengalami kemacetan tetapi masih memiliki efek *residual* seperti peningkatan kewaspadaan dan nilainya berubah seiring waktu $R(t)$.

Lebih lanjut, penelitian ini merupakan penelitian pengembangan yang telah dilakukan oleh (Rafsanjani *et al.*, 2023), penelitian tersebut tidak mempertimbangkan waktu tundaan dan dari kelas yang $R(t)$ tidak kembali ke kelas yang rentan $S(t)$. Untuk lebih memahami proses pemodelan, diilustrasikan pada Gambar (2).



Gambar 1. Ilustrasi kemacetan lalu lintas



Gambar 2. Diagram alir model kemacetan lalu lintas

Pada Gambar 2, dapat dibentuk persamaan-persamaan matematika seperti Persamaan 1 sebagai berikut.

$$\frac{dS(t)}{dt} = \alpha - \gamma S(t) - \beta S(t)I(t - \tau_1) + \epsilon R(t - \tau_2) \quad (1)$$

Persamaan (1) merupakan perubahan kendaraan yang rentan mengalami kemacetan yang berubah seiring dengan berjalannya waktu. Kendaraan memasuki sistem lalu bergerak menuju kondisi lalu lintas yang mengalami kemacetan dengan laju perpindahan sebesar α . Lebih lanjut, pengendara yang berada pada kondisi rentan kemacetan dapat keluar dari lalu lintas yang berpotensi macet, misalnya karena mencari jalur alternatif, telah mencapai tujuan, berbelok ke ruas jalan lain, berhenti untuk parkir, laju perubahan ini dinyatakan dengan parameter γ .

Di sisi lain, kendaraan yang berada dalam kondisi rentan kemacetan memiliki potensi untuk berhenti

akibat kepadatan lalu lintas didepannya. Sebelum berhenti, pengendara memerlukan waktu untuk mengamati kondisi lalu lintas hingga melakukan pengereman. Selang waktu respons pengendara tersebut sampai berhenti karena kemacetan (melakukan pengereman) disebut sebagai waktu tundaan τ_1 dan tingkat interaksi antara kendaraan yang rentan. Sedangkan untuk laju kemacetannya sebesar β . Akibat adanya waktu tundaan τ_1 , perubahan dari kondisi rentan kemacetan ke macet tidak terjadi secara instan, melainkan dipengaruhi oleh kondisi lalu lintas pada waktu sebelumnya, nilai ini dapat dituliskan sebagai $t - \tau_1$. Dalam konteks pemodelan matematika, hal ini mencerminkan perilaku pengendara memiliki efek memori, sehingga sistem lalu lintas mampu menangkap fenomena keterlambatan respons manusia.

Dinamika kendaraan pada kondisi rentan juga dipengaruhi oleh banyaknya kendaraan yang telah kembali berjalan normal. Laju perubahan akibat interaksi ini dinyatakan dengan parameter ϵ . Pada penelitian ini juga dipertimbangkan waktu tundaan yang kedua yang dari kelas R ke kelas S . Hal ini karena waktu yang dibutuhkan pengendara untuk menyadari bahwa kondisi lalu lintas yang semula lancar mulai berubah menjadi tidak stabil. Keputusan pengendara pada waktu t dipengaruhi oleh kondisi lalu lintas pada waktu sebelumnya, yaitu $t - \tau_2$. Dengan adanya waktu tundaan ini, perpindahan dari R ke S tidak terjadi secara instan, melainkan dipengaruhi oleh banyaknya kendaraan normal pada waktu lampau.

Pada Gambar 2 juga dapat ditinjau perubahan kendaraan yang mengalami kemacetan yang berubah seiring dengan berjalannya waktu, yang kemudian dinyatakan pada Persamaan 2. Kelas dari kendaraan yang mengalami kemacetan dipengaruhi oleh $\beta S(t)I(t - \tau_1)$ yang telah dijelaskan pada bagian sebelumnya.

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} &= \beta S(t)I(t - \tau_1) - \epsilon I(t) \\ &\quad - (1 - a)bI(t)P(t) \end{aligned} \quad (2)$$

Selain itu, perubahan kendaraan pada kelas ini juga dipengaruhi oleh laju perubahan kendaraan ϵ yang keluar dari kemacetan dengan cara mencari jalur alternatif. Di sisi lain, kelas ini juga dipengaruhi oleh laju penambahan antrian kendaraan pada lampu merah sebesar $(1 - a)b$. Lebih lanjut, laju kendaraan macet yang secara efektif berkontribusi terhadap dinamika perubahan kondisi lalu lintas, dengan mempertimbangkan a sebagai kendaraan yang mengalami kemacetan bergerak pelan-pelan (peluang kendaraan lolos dari persimpangan lampu merah), sedangkan b adalah laju perubahan kondisi

kemacetan lalu lintas akibat penyesuaian lalu lintas yang ada di sekitar. Pada Gambar 2 juga dapat ditinjau perubahan kendaraan yang bergerak pelan dan yang berjalan normal serta nilainya berubah seiring dengan berjalannya waktu seperti pada Persamaan 3 dan 4.

$$\frac{dP(t)}{dt} = (1 - a)bI(t)P(t) - \mu P(t) \quad (3)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \mu P(t) - \theta R(t) - \epsilon R(t - \tau_2) \quad (4)$$

Perubahan kendaraan pada kelas $P(t)$ dipengaruhi juga oleh laju kendaraan yang awalnya berjalan pelan karena setelah melewati lampu merah menjadi normal dan kondisi ini sebesar μ .

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \alpha - \gamma S(t) - \beta S(t)I(t - \tau_1) + \epsilon R(t - \tau_2) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t - \tau_1) - \epsilon I(t) - (1 - a)bI(t)P(t) \\ \frac{dP(t)}{dt} = (1 - a)bI(t)P(t) - \mu P(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \mu P(t) - \theta R(t) - \epsilon R(t - \tau_2) \end{cases} \quad (5)$$

Di sisi lain, perubahan kendaraan pada kelas $R(t)$ juga dipengaruhi oleh komponen θ yang berarti bahwa laju kendaraan yang keluar dari sistem akibat sudah sampai tujuan. Berdasarkan Persamaan (1) sampai Persamaan 4 dapat dibentuk sistem persamaan diferensial dengan dua tundaan seperti pada Sistem 5.

Perlu dipahami bahwa nilai dari semua variabel $S(t), I(t), P(t), R(t) \geq 0$. Hal ini sesuai dengan interpretasi real yang terjadi bahwa banyaknya kendaraan selalu non negatif. Semua parameternya bernilai $0 \leq \alpha, \beta, \gamma, \theta, \epsilon, a, b, \mu, \epsilon \leq 1$.

Menentukan titik ekuilibrium

Titik ekuilibrium adalah suatu titik yang nilainya tidak bergantung dengan waktu, secara matematis dapat dituliskan menjadi $\left(\frac{dS(t)}{dt} = \frac{dI(t)}{dt} = \frac{dP(t)}{dt} = \frac{dR(t)}{dt} = 0\right)$ (Ahmadi & Widodo, 2020; Hartono *et al.*, 2018). Selanjutnya, penentuan titik ekuilibrium dibagi menjadi dua bagian, yakni bebas macet dan macet menetap.

Titik ekuilibrium bebas macet.

Titik ini terjadi ketika banyaknya kendaraan yang berada di kemacetan nilainya sama dengan nol, dengan kata lain nilai dari $\hat{I}_1 = 0$, sehingga penyelesaian dari Sistem (5) dalam kondisi ekuilibrium menjadi: $\hat{I}_1 = \hat{P}_1 = 0$ dan $\alpha - \gamma \hat{S}_1 = 0$ dimana $\hat{S}_1 = \frac{\alpha}{\gamma}$

Jadi, titik ekuilibrium bebas macet adalah

$$A_1 = (\hat{S}_1, \hat{I}_1, \hat{P}_1, \hat{R}_1) = \left(\frac{\alpha}{\gamma}, 0, 0, 0\right)$$

Artinya banyaknya kendaraan yang rentan terhadap kemacetan sebanyak $\frac{\alpha}{\gamma}$ kendaraan dan tidak ada kemacetan di persimpangan lampu lalu lintas (kendaraan berjalan lancar).

Titik ekuilibrium macet menetap

Titik ini terjadi ketika nilai dari $\hat{I}_2 > 0$. Lebih lanjut, pada Sistem (5) dalam kondisi ekuilibrium diperoleh penyelesaian $A_2 = (\hat{S}_2, \hat{I}_2, \hat{P}_2, \hat{R}_2)$ dengan

$$\begin{aligned}\hat{S}_2 &= \frac{(1-a)b[\epsilon\epsilon\mu - \alpha(1-a)b(\theta + \epsilon)]}{(1-a)b[\beta\mu\epsilon - (\theta + \epsilon)(\beta\mu + \gamma(1-a)b)]} \\ \hat{I}_2 &= \frac{\mu}{(1-a)b} \\ \hat{P}_2 &= \frac{(\theta + \epsilon)\hat{R}_2}{\mu} \\ \hat{R}_2 &= \frac{1}{\epsilon} \left[\left(\frac{\beta\mu}{(1-a)b} + \gamma \right) \hat{S}_2 - \alpha \right]\end{aligned}$$

Artinya bahwa penyelesaian dari sistem akan konvergen ke titik ekuilibrium macet menetap A_2 dan kemacetan akan selalu terjadi.

Menentukan bilangan reproduksi dasar

Bilangan reproduksi dasar merupakan suatu kondisi dimana dapat ditentukan seberapa banyak kendaraan yang mengalami kemacetan atau lancar dalam sistem tersebut dan seberapa parah tingkat kemacetan yang terjadi. Penentuan bilangan reproduksi dasar ini ditentukan dengan metode *next generation matrix* (Chen-Charpentier, 2024; Hu *et al.*, 2019).

Nilai ini dipengaruhi perubahan kendaraan yang mengalami kemacetan dan mulai bergerak dari kondisi macet, ini dinyatakan dalam bentuk berikut

$$A = F - V$$

dengan

$$F = \begin{pmatrix} \beta S(t)I(t - \tau_1) \\ (1-a)bI(t)P(t) \end{pmatrix}$$

dan

$$V = \begin{pmatrix} \epsilon I(t) + (1-a)bI(t)P(t) \\ \mu P(t) \end{pmatrix}$$

Lebih lanjut, matriks F ditentukan dari banyaknya kendaraan yang menjadi menyumbang terbesar dari kemacetan. Sedangkan matriks V merupakan banyaknya kendaraan yang berhasil keluar dari kondisi kemacetan.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(A_1) &= \begin{pmatrix} \frac{\beta\alpha}{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{V}(A_1) &= \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Sehingga didapatkan

$$W = \mathcal{F}(A_1)(\mathcal{V}(A_1))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\beta\alpha}{\epsilon\gamma} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Berdasarkan Persamaan (6), sehingga didapatkan nilai eigen terbesar dari matriks W (Brouwer, 2022; van den Driessche, 2017), yakni

$$R_0 = \frac{\beta\alpha}{\epsilon\gamma} \quad (7)$$

Ketika nilai $R_0 < 1$ artinya kendaraan berjalan lancar (bebas macet), sedangkan nilai $R_0 > 1$ artinya kendaraan mengalami kemacetan dan kemacetannya akan menular ke kendaraan lain (Saberi *et al.*, 2020).

Analisis sensitifitas parameter

Analisis parameter pada model kemacetan dilakukan untuk melakukan analisis bagaimana perubahan nilai suatu parameter mempengaruhi dinamika kemacetan (Al-arydah, 2024; Kouidere *et al.*, 2021; Syrti *et al.*, 2023). Dengan menganalisis parameter, dapat ditentukan sejauh mana kemacetan dapat menyebar (melalui bilangan reproduksi dasar R_0). Lebih lanjut, pada Persamaan (7) parameter yang mempengaruhi terjadinya kemacetan adalah β , α , ϵ dan γ . Sehingga untuk mengetahui parameter mana yang paling berpengaruh, perhatikan analisis berikut

$$\begin{aligned}\Delta_x^{R_0} &= \frac{x}{R_0} \cdot \frac{\partial R_0}{\partial x} \\ \Delta_\beta^{R_0} &= \frac{\beta}{R_0} \cdot \frac{\partial R_0}{\partial \beta} = 1 \\ \Delta_\alpha^{R_0} &= \frac{\alpha}{R_0} \cdot \frac{\partial R_0}{\partial \alpha} = 1 \\ \Delta_\epsilon^{R_0} &= \frac{\epsilon}{R_0} \cdot \frac{\partial R_0}{\partial \epsilon} = -\frac{1}{\epsilon^2} \\ \Delta_\gamma^{R_0} &= \frac{\gamma}{R_0} \cdot \frac{\partial R_0}{\partial \gamma} = -\frac{1}{\gamma^2}\end{aligned}$$

Karena nilai dari $0 \leq \beta, \alpha, \epsilon, \gamma \leq 1$, sehingga nilai dari $\Delta_\epsilon^{R_0}, \Delta_\gamma^{R_0} < 0$. Lebih lanjut, karena nilai dari $\Delta_\beta^{R_0}, \Delta_\alpha^{R_0} > 0$ sehingga parameter β dan α berpengaruh signifikan terhadap Sistem (5). Nilai parameter ini yang akan jadi kandidat dalam menentukan ambang batas pada model kemacetan.

Simulasi numerik

Pada bagian simulasi ini, dipilih nilai untuk melakukan simulasi numerik dan kroscek dengan analisis yang telah dilakukan. Simulasi dimulai dengan pemilihan parameter, simulasi kurva penyelesaian pada titik ekuilibrium bebas kemacetan, kemacetan yang menetap. Kemudian menunjukkan perilaku parameter tingkat kemacetan dan pengaruh tundaan pada model yang telah dibangun.

Tabel 1. Interpretasi Parameter pada Simulasi

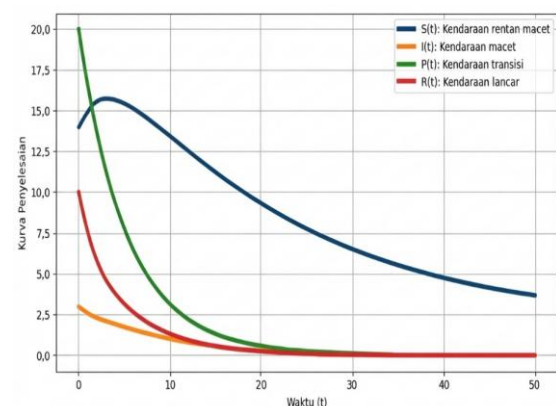
Notasi	Nilai	Sumber	Interpretasi
α	0,1	(Rafsanjani <i>et al.</i> , 2023)	Ada sebanyak 10 kendaraan yang melintas, dari 10 kendaraan tersebut, 1 kendaraan per detik bergerak ke kelas yang rentan mengalami kemacetan.
β	0,01 (bebas macet), 0,1 (kemacetan menetap)	Asumsi	Pada kondisi ini sebanyak 0,01 = 1% dari total kendaraan per menit beralih dari kelas rentan mengalami kemacetan ke kelas yang mengalami kemacetan, sehingga ini akan menyebabkan kondisi lalu lintas masih dalam tahap tidak mengalami kemacetan (terkendali). Hal yang sama juga berlaku untuk 0,1 = 10% dari total kendaraan per menit beralih dari kelas rentan mengalami kemacetan ke kelas yang mengalami kemacetan. Kondisi ini menyebabkan kemacetan akan selalu ada dalam persimpangan lalu lintas, sehingga untuk mengurainya perlu intervensi.
γ	0,05	(Rafsanjani <i>et al.</i> , 2023)	Ada sebanyak 100 kendaraan yang melintas, dari 100 kendaraan tersebut, 5 kendaraan per detik bergerak meninggalkan kelas rentan karena sudah sampai tujuan atau berbelok mencari jalur alternatif.
ϵ	0,1 (bebas macet), 0,01 (kemacetan menetap)	Asumsi	Nilai 0,1 diartikan sebagai ada sebanyak 10 kendaraan yang melintas, dari 10 kendaraan tersebut, 1 kendaraan per detik bergerak keluar dari kemacetan karena mencari jalur alternatif, karena jalur utama mengalami kemacetan. Interpretasi yang serupa juga terjadi untuk nilai $\epsilon = 0,01$.
a	0,6	(Rafsanjani <i>et al.</i> , 2023)	Sebanyak 0,6 = 60% kendaraan yang berada dalam kondisi macet dapat berpindah ke kelas kendaraan yang bergerak pelan.
b	0,2	(Rafsanjani <i>et al.</i> , 2023)	Laju perubahan kondisi lalu lintas sebesar 0,2 per detik.
μ	0,2	(Rafsanjani <i>et al.</i> , 2023)	Ada sebanyak 10 kendaraan yang melintas, dari 10 kendaraan tersebut, 2 kendaraan per detik bergerak dengan kecepatan normal.
ε	0,2	Asumsi	Ada sebanyak 10 kendaraan yang melintas dengan kecepatan normal, dari 10 kendaraan tersebut, 2 kendaraan per detik bergerak ke kelas yang rentan mengalami kemacetan.

Untuk simulasi titik ekuilibrium bebas macet akan konvergen ke $A_1 = (\hat{S}_1, \hat{I}_1, \hat{P}_1, \hat{R}_1) = (2,0,0,0)$. Artinya kurva solusi akan selalu mengarah ke titik $(2,0,0,0)$. Lebih lanjut, didapatkan bilangan reproduksi dasarnya $R_0 = 0,199$. Artinya kendaraan tidak mengalami kemacetan (bebas macet) karena nilai dari $R_0 < 1$.

Gambar 3 menunjukkan dinamika kondisi lalu lintas dari waktu ke waktu. Pada awal simulasi, banyaknya kendaraan yang berada dalam kondisi rentan mengalami kemacetan relatif tinggi. Seiring berjalannya waktu, banyaknya kendaraan rentan mengalami penurunan karena sebagian kendaraan berpindah ke kondisi lalu lintas lainnya, terutama kondisi macet dan bergerak lambat. Sementara itu, banyaknya kendaraan yang mengalami kemacetan menunjukkan penurunan pada fase awal simulasi dan selanjutnya mendekati nol.

Kondisi ini menunjukkan bahwa sistem secara bertahap menuju titik ekuilibrium bebas macet A_0 , yaitu kondisi ketika banyaknya kendaraan dalam keadaan macet mendekati nol. Dengan demikian, berdasarkan hasil simulasi, kemacetan yang terjadi

pada fase awal bersifat sementara dan secara bertahap mereda seiring waktu.



Gambar 3. Kurva penyelesaian titik ekuilibrium bebas kemacetan

Perilaku serupa juga ditunjukkan pada banyak kendaraan yang bergerak dalam kondisi lancar, yang mengalami perubahan pada fase awal sebelum kemudian mencapai kondisi yang relatif stabil. Di sisi lain, banyak kendaraan dalam kondisi bergerak lambat mengalami peningkatan yang cukup tajam

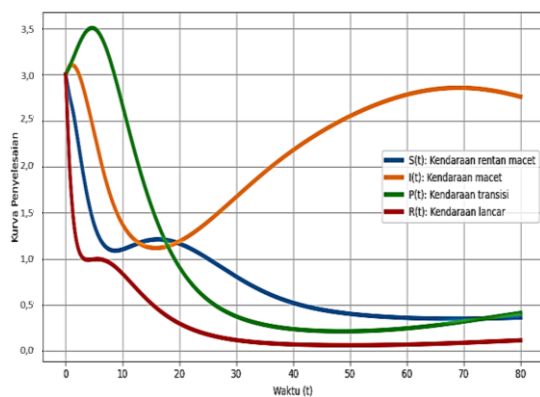
pada awal simulasi, kemudian menurun secara bertahap. Penurunan tersebut menunjukkan adanya perpindahan kendaraan dari kondisi bergerak lambat menuju kondisi lalu lintas yang lebih lancar.

Sedangkan untuk titik ekuilibrium kemacetan menetap dan konvergen ke

$$A_2 = (\hat{S}_2, \hat{I}_2, \hat{P}_2, \hat{R}_2) \\ = (0,40; 2,49; 0,382; 0,1093)$$

dan bilangan reproduksi dasarnya $R_0 = 2$

Artinya satu kendaraan yang berada dalam kondisi macet, selama periode kemacetannya, secara rata-rata dapat menyebabkan dua kendaraan lain ikut masuk ke kondisi macet. Dua kendaraan yang macet tersebut juga akan menyebabkan empat kendaraan lain ikut macet juga jika tidak ada intervensi, begitu seterusnya.

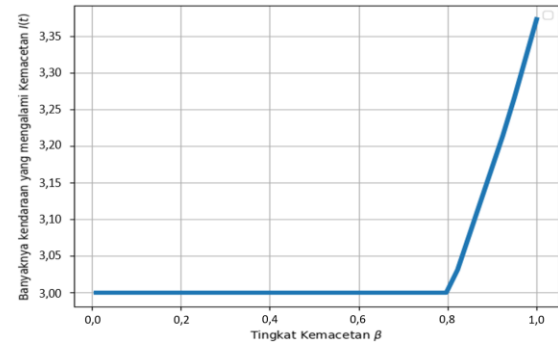


Gambar 4. Kurva penyelesaian titik ekuilibrium kemacetan yang menetap

Gambar (4) menunjukkan bahwa kondisi lalu lintas mengalami fluktuasi sebelum mencapai keadaan stabil. Pada awal simulasi, banyaknya kendaraan rentan dan kendaraan macet cukup banyak, tetapi banyaknya kendaraan macet mengalami penurunan di awal waktu. Sementara itu, banyaknya kendaraan yang mengalami transisi meningkat hingga mencapai nilai maksimum, kemudian menurun secara bertahap. Setelah itu, banyaknya kendaraan macet kembali meningkat dan seiring dengan berjalannya waktu nilainya cenderung stabil, sedangkan kendaraan rentan dan kendaraan dalam kondisi transisi terus menurun sebelum mendekati nilai konstan sesuai dengan titik ekuilibrium endemik macet A_2 .

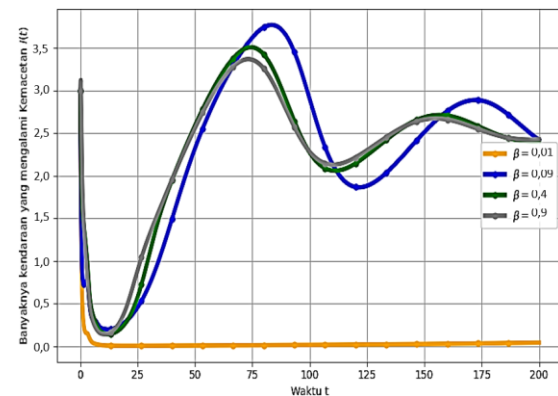
Grafik pada Gambar 5 menunjukkan bahwa selama tingkat kemacetan (β) pada interval 0 sampai 0,8, kondisi lalu lintas relatif stabil sehingga banyak kendaraan yang mengalami kemacetan hampir tidak ada. Namun, ketika tingkat kemacetan (β) melewati ambang batas 0,8 terjadi lonjakan banyaknya kendaraan sehingga menyebabkan

terjadinya kemacetan, artinya sistem punya kapasitas batas. Lebih lanjut, ketika mengalami kemacetan, sedikit peningkatan saja nilai β menyebabkan lonjakan banyaknya kendaraan yang macet.



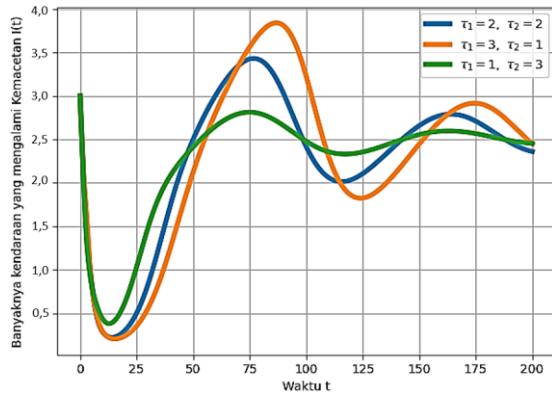
Gambar 5. Pengaruh tingkat kemacetan Vs banyak kendaraan yang mengalami kemacetan

Gambar (6) menunjukkan pengaruh nilai β terhadap banyak kendaraan yang mengalami kemacetan. Pada awal simulasi, seluruh kurva menunjukkan banyak kendaraan macet cukup tinggi karena sistem dimulai dari kondisi awal dengan tingkat kemacetan yang besar.



Gambar 6. Pengaruh tingkat kemacetan dan banyak kendaraan yang mengalami kemacetan terhadap waktu

Ketika $\beta = 0,01$, banyak kendaraan macet menurun dengan cepat hingga mendekati nol, yang menunjukkan bahwa tidak terjadi kemacetan. Sebaliknya, ketika nilai β diperbesar, seperti $\beta = 0,09, 0,4$, dan $0,9$, banyak kendaraan macet kembali meningkat setelah mengalami penurunan dan kemudian berfluktuasi dari waktu ke waktu. Semakin besar nilai β , kemacetan cenderung lebih mampu bertahan dalam sistem. Hasil ini menunjukkan bahwa β berperan dalam menentukan tingkat kemacetan untuk berkembang dan bertahan, sedangkan waktu tundaan menyebabkan banyak kendaraan macet mengalami naik-turun secara berkala.



Gambar 7. Perilaku Waktu Tundaan Terhadap Banyak Kendaraan yang mengalami kemacetan

Gambar (7) menunjukkan bahwa waktu tundaan dalam model persimpangan lalu lintas sangat memengaruhi naik turunnya banyak kendaraan yang mengalami kemacetan. Pada awal waktu, semua kondisi mengalami penurunan kemacetan yang cepat, namun setelah itu muncul osilasi seperti gelombang akibat adanya waktu tunda. Ketika nilai $\tau_1 = \tau_2$, banyaknya kendaraan di awal waktu mengalami penurunan kemudian mengalami kenaikan lalu osilasi, dan berfluktuasi di sekitar nilai tertentu.

Di sisi lain, ketika nilai τ_1 (waktu tunda perpindahan kendaraan sdari kondisi rentan ke kondisi macet) lebih dari τ_2 , peningkatan kemacetan terjadi lebih lambat, tetapi dapat menjadi lebih tinggi. Sebaliknya, ketika nilai τ_2 (waktu tunda kendaraan pulih dari kondisi normal dan kembali ke kondisi rentan kemacetan) lebih dari τ_1 , kemacetan cenderung bertahan lebih lama sehingga perubahan banyak kendaraan macet berlangsung lebih lambat. Seiring berjalannya waktu, perbedaan respons antar-skenario semakin kecil dan sistem lalu lintas akhirnya menuju kondisi yang relatif stabil ke suatu nilai tertentu yang bukan nol. Lebih lanjut, perubahan nilai τ_1, τ_2 yang kecil dapat mempengaruhi perilaku dari banyaknya kendaraan pada persimpangan lalu lintas.

Kesimpulan

Berdasarkan analisis yang telah dilakukan, dapat dibangun model matematika dengan pendekatan sistem persamaan diferensial dua tundaan dan didapatkan dua titik ekuilibrium bebas macet, macet menetap. Selain itu, didapatkan juga bilangan reproduksi dasar untuk menentukan ambang batas melakukan intervensi terhadap kemacetan yang ada di persimpangan lalu lintas.

Lebih lanjut, hasil simulasi menunjukkan bahwa waktu tundaan berperan penting dalam membentuk dinamika kemacetan lalu lintas. Waktu tundaan τ_1

pada perpindahan dari kondisi rentan ke macet menyebabkan kemacetan muncul lebih lambat namun berpotensi meningkat akibat penumpukan kendaraan, sedangkan waktu tundaan τ_2 pada proses pemulihan membuat kemacetan bertahan lebih lama sebelum mereda. Interaksi kedua waktu tundaan ini memunculkan dinamika transien berupa osilasi sebelum sistem mencapai kondisi stabil. Selain itu, parameter β sebagai laju propagasi kemacetan yang berinteraksi dengan waktu tundaan. Lebih lanjut, ketika nilai dari β kecil kemacetan cepat mereda, sedangkan pada β besar dan waktu tundaan lama, kemacetan dapat meningkat, bertahan lebih lama, dan menimbulkan osilasi di awal waktu. Dengan demikian, tingkat, durasi, dan pola kemacetan ditentukan secara bersama oleh nilai β dan waktu tundaan dalam sistem lalu lintas.

Daftar Pustaka

- Ahmadi, A., & Widodo, W. (2020). Local stability of malware propagation model on network computer with two time delay. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 2296, No. 1). AIP Publishing. <https://doi.org/10.1063/5.0030321>
- Al-arydah, M. T. (2024). Assessing vaccine efficacy for infectious diseases with variable immunity using a mathematical model. *Scientific Reports*, 14(1), 18572. <https://doi.org/10.1038/s41598-024-69651-6>
- Brouwer, A. F. (2022). Why the Spectral Radius? An intuition-building introduction to the basic reproduction number: AF Brouwer. *Bulletin of Mathematical Biology*, 84(9), 96. <https://doi.org/10.1007/s11538-022-01057-9>
- Bukola, O., Adetunmbi, A., & Yusuf, T. (2016). An SIRS Model of Virus Epidemic on a Computer Network. *British Journal of Mathematics & Computer Science*, 17(5), 1–12. <https://doi.org/10.9734/bjmcs/2016/24816>
- Chen-Charpentier, B. (2024). SIRS Epidemic Models with Delays, Partial and Temporary Immunity and Vaccination. *AppliedMath*, 4(2), 666–689. <https://doi.org/10.3390/appliedmath4020036>
- Eom, M., & Kim, B. I. (2020). The traffic signal control problem for intersections: a review. *European transport research review*, 12(1), 50. <https://doi.org/10.1186/s12544-020-00440-8>
- Hartono, Saptaningtyas, F. Y., & Krisnawan, K. P. (2018). Dynamical analysis of Lorenz System on traffic problem in Yogyakarta, Indonesia. In

- Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 983, No. 1, p. 012092). IOP Publishing.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/983/1/012092>
- Faisal, M. R. H. (2025). Impact of flyover on traffic flow characteristics: A case study on Moghbazar-Mouchak flyover. *Case Studies on Transport Policy*, 101632.
<https://doi.org/10.1016/j.cstp.2025.101632>
- Hu, H., Yuan, X., Huang, L., & Huang, C. (2019). Global dynamics of an SIRS model with demographics and transfer from infectious to susceptible on heterogeneous networks. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 16(5), 5729–5749. <https://doi.org/10.3934/mbe.2019286>
- Kouidere, A., Kada, D., Balatif, O., Rachik, M., & Naim, M. (2021). Optimal control approach of a mathematical modeling with multiple delays of the negative impact of delays in applying preventive precautions against the spread of the COVID-19 pandemic with a case study of Brazil and cost-effectiveness. *Chaos, Solitons & Fractals*, 142, 110438.
<https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110438>
- Kozhabek, A., Chai, W. K., & Zheng, G. (2024). Modeling Traffic Congestion Spreading Using a Topology-Based SIR Epidemic Model. *IEEE Access*, 12, 35813–35826.
<https://doi.org/10.1109/ACCESS.2024.3370474>
- Mishra, B. K., & Ansari, G. M. (2012). Differential Epidemic Model of Virus and Worms in Computer Network. In *International Journal of Network Security*, 14(3), 149–155
[https://doi.org/10.6633/IJNS.201205.14\(3\).03](https://doi.org/10.6633/IJNS.201205.14(3).03)
- Murat, Y. S., & Cetin, M. (2019). A new perspective for saturation flows at signalized intersections. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, 63(1), 296–307.
<https://doi.org/10.3311/PPci.11344>
- Qi, L., Zhou, M., & Luan, W. (2016). Impact of driving behavior on traffic delay at a congested signalized intersection. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 18(7), 1882–1893.
<https://doi.org/10.1109/TITS.2016.2613598>
- Rafsanjani, Z. A., Herdiana, R., Heru Tjahjana, R., & Erlangga, Y. A. (2023). Traffic Congestion Analysis Using Sir Epidemic Model. *Barekeng*, 17(4), 2471–2478.
<https://doi.org/10.30598/barekengvol17iss4pp2471-2478>
- Saberi, M., Hamedmoghadam, H., Ashfaq, M., Hosseini, S. A., Gu, Z., Shafiei, S., Nair, D. J., Dixit, V., Gardner, L., Waller, S. T., & González, M. C. (2020). A simple contagion process describes spreading of traffic jams in urban networks. *Nature Communications*, 11(1), 1616.
<https://doi.org/10.1038/s41467-020-15353-2>
- Saptaningtyas, F. Y., Andayani, S., & Ahmadi. (2024). Optimal control analysis on a new computer virus model with saturated incidence, vaccination, and treatments. *Communications in Mathematical Biology and Neuroscience*, 2024, 1–12.
<https://doi.org/10.28919/cmbn/8762>
- Mubarez, G., S., & Mohsini, M., N., (2025). SIR Model and its Applications, *Journal of Mathematics and Statistics Studies*, 6(6), 7–17.
<https://doi.org/10.32996/jmss.2025.6.6.2>
- Syrti, B. M., Devi, A., & Kashyap, A. J. (2023). Analysis of Stability, Sensitivity Index and Hopf Bifurcation of Eco-Epidemiological SIR Model under Pesticide Application. *Communication in Biomathematical Sciences*, 6(2), 126–144.
<https://doi.org/10.5614/cbms.2023.6.2.4>
- TomTom. (2024). *Full ranking 2024*. tomtom.com
- Van den Driessche, P. (2017). Reproduction numbers of infectious disease models. *Infectious disease modelling*, 2(3), 288–303.
<https://doi.org/10.1016/j.idm.2017.06.002>
- Zhang, X., Li, C., & Huang, T. (2016). Impact of impulsive detoxication on the spread of computer virus. *Advances in Difference Equations*, 2016(1), 1–18.
<https://doi.org/10.1186/s13662-016-0944-x>
- Zhang, Y., & Pan, D. (2021). Layered SIRS model of information spread in complex networks. *Applied Mathematics and Computation*, 411, 126524.
<https://doi.org/10.1016/j.amc.2021.126524>
- Zhao, Y., Zhang, W., Lu, J., Zhang, W., & Ma, Y. (2015). Estimation of Saturation Flow Rate and Start-Up Lost Time for Signal Timing Based on Headway Distribution. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2015(1), 304823.
<https://doi.org/10.1155/2015/304823>