Jurnal MKTS
Jurnal Ilmu dan Terapan Bidang Teknik Sipil
ISSN 0854-1809

Perilaku Beban-Perpindahan Aksial *Pre-Buckling* dan *Post-Buckling* pada Struktur Kolom Elastis

Sumirin
Jurusan Teknik Sipil, Fakultas Teknik, Universitas Islam Sultan Agung
Jl. Raya Kaligawe Km. 04 Semarang
E-mail: sumirinms@gmail.com

Abstract

The analysis of column buckling is generally based on the analysis of linear eigenvalue problem to obtain the buckling load. In the linear analysis we do not know the load-displacement behavior especially after buckling occurs. This research studied the behavior of the elastic column on the stage pre-buckling and post-buckling by finite gemetrically nonlinear of finite element method. Difficulties in equilibrium problem at around the point of buckling load solved by using the Newton-Raphson incremental method with constant arc- length technique. To generate the initial touch of buckling columns are very small lateral load or by providing the initial lateral deformation is very small. Axial load-displacement curve column finite element analysis results compared to the results of previous reseacher. An axial load-displacement curve bilinear proposed in this study.

Keywords: *Column, Buckling, Finite element, Geometrically nonlinear analysis.*

Abstrak

Analisis buckling pada kolom pada umumnya didasarkan pada analisis linier masalah nilai eigen untuk mendapatkan beban buckling. Pada analisis linier tidak diketahui perilaku beban-perpindahan terutama setelah terjadi buckling. Penelitian ini mempelajari perilaku kolom elastik pada tahap sebelum dan sesudah buckling dengan metode elemen hingga nonlinier geometri. Kesulitan pada masalah kesetimbangan pada beban di sekitar titik buckling diatasi dengan menggunakan metode inkremental Newton-Raphson dengan teknik panjang busur konstan. Untuk membangkitkan terjadinya buckling kolom diberi sentuhan awal beban lateral yang sangat kecil atau dengan memberikan deformasi awal lateral yang sangat kecil. Kurva beban-perpindahan aksial kolom hasil analisis elemen hingga dibandingkan dengan hasil peneliti terdahulu. Sebuah kurva beban-perpindahan aksial bilinier diusulkan dalam penelitian ini.

Kata-kata Kunci: *Kolom, Buckling, Elemen hingga, Analisis nonlinier geometri .*

Pendahuluan

Tekuk atau *buckling* pada batang kolom langsing merupakan fenomena instabilitas pada struktur. Perilaku deformasi perpindahan *buckling* tidak dapat diketahui dengan analisis linier tetapi dapat diselesaikan dengan menggunakan analisis nonlinier geometri *(geometrically nonlinear analysis)*. Pelopor terkemuka dalam studi perilaku *buckling* kolom adalah Leonhard Euler (1707-1783 M) pada tahun 1759 M (Timoshenko dan Gere, 1961). Hubungan antara beban kritis *buckling* dengan sifat bahan dan geometri kolom telah dirumuskan yang terkenal dengan rumus Euler. Timoshenko dan Gere (1961) merumuskan beban kritis *buckling* pada kolom dan perpindahan besar *(large displacement)* dengan solusi integral elips. Penelitian selanjutnya yang memberikan perhatian pada masalah perilaku *post-buckling* kolom antara lain dijumpai pada pada Bazant dan Cedolin (1991), Meguro dan Tagel-Din (1999).

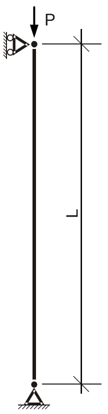
Penelitian *post-buckling* kolom terdahulu pada umumnya memberikan perhatian kepada perilaku nonlinier pada kurva beban perpindahan lateral. Perilaku kurva beban-perpindahan aksial belum banyak mendapat perhatian. Menurut penulis, kurva beban-perpindahan aksial pada *post-buckling* kolom sangat penting untuk pelajari untuk diterapkan pada analisis beban batas pada sistem struktur rangka batang atau sistem *frame*. Salah satu atau beberapa komponen batang yang mengalami *buckling* dapat mempengaruhi perilaku sistem struktur secara keseluruhan.

Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui perilaku beban-perpindahan aksial struktur kolom elastis pada tahap beban *pre-buckling* dan *post-buckling*. Model elemen hingga nonlinier geometri balok-kolom 2 dimensi digunakan dalam penelitian ini. Untuk menimbulkan awal terjadinya *buckling* pada kolom diberikan 2 cara yaitu dengan gaya sentuhan lateral awal yang sangat kecil dan perpindahan awal yang sangat kecil pada kolom.

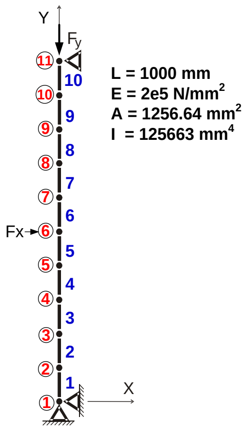
Metodologi

Definisi masalah

Struktur kolom ditumpu pada kedua ujungnya dengan beban aksial sentris dengan geometri seperti ditunjukkan pada Gambar 1a Panjang kolom L=1000 mm; luas penampang kolom A=1256,64 mm^2; momen inersia penampang I=125633 mm^4 dan modulus elastisitas bahan E=2x105 N/mm^2. Penelitian ini menggunakan metode simulasi komputasi numerik Metode Elemen Hingga dengan bantuan Program ANSYS Release 12 dengan fasilitas dari Laboratorium Perancangan dan Tribologi Jurusan Teknik Mesin Universitas Diponegoro Semarang. Pemodelan elemen hingga ditunjukkan pada Gambar 1b. Jenis elemen hingga yang digunakan adalah elemen balok-kolom bidang BEAM3, analisis nonlinier geometri perpindahan besar dengan asumsi sifat bahan masih dalam batas elastis. Beban aksial sentris P atau Fy dikerjakan pada sumbu batang. Untuk membangkitkan terjadinya buckling pada kolom diberikan gaya atau perpindahan awal pembangkit pada tengah-tengah tinggi kolom. Besarnya gaya atau perpindahan awal sebagai pembangkit sangat kecil yaitu Fx=1x10-5 Fy dan δx=1/1000*L.



a. Geometri struktur kolom



b. Model elemen hingga kolom

Gambar 1. Geometri dan model elemen hingga struktur kolom.

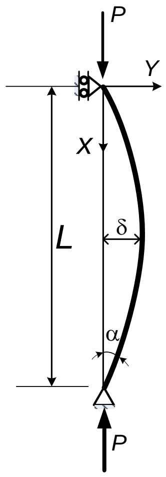
Analisis *linear buckling* kolom

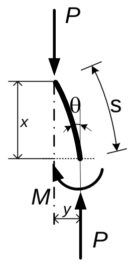
Sebuah kolom dengan panjang L, dibebani gaya P yang bekerja pada sumbu batang yang tumpuan ujung-ujungnya sendi dan rol, seperti terlihat pada Gambar 2. Hubungan antara beban kritis *buckling* dengan sifat bahan dan geometri kolom telah dirumuskan oleh Leonhard Euler (Timoshenko dan Gere, 1961), yaitu:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad \text{...} \quad (1)$$

dimana:
P_{cr} = beban kritis terkecilm
E = modulus elastisitas bahan
I = momen inersia penampang
L = panjang tekuk batang.

Persamaan (1) yang dikenal sebagai rumus Euler untuk kolom, memberikan gambaran bahwa karakteristik keruntuhan *buckling* tergantung kepada modulus elastisitas bahan E, momen inersia batang I, dan panjang L dan tidak tergantung kepada kekuatan bahan atau batas kelelehan bahan.





b. ***Free body diagram***

a. Geometri kolom terdeformasi

Gambar 2. Geometri kolom terdeformasi dan *free body diagram.*

Analisis *non-linear buckling* kolom

Pada analisis *linear buckling* kolom tidak diketahui hubungan antara beban dengan perpindahan. Untuk mengetahui perilaku hubungan beban-perpindahan kolom sebelum dan sesudah *buckling* dapat dilakukan dengan analisis *nonliniear buckling* kolom dapat didekati dengan teori lendutan besar (*large deflection theory*). Solusi persamaan diferensial pada kasus lendutan besar setelah terjadi buckling dapat dilihat pada Timoshenko dan Gere (1961) dan Chajes (1974).

Hubungan antara beban dan lendutan dapat dirumuskan dalam bentuk (Chajes,1974):

$$\frac{P}{P_{cr}} = \frac{4\,\kappa^2}{\pi^2} \quad \text{...} \quad (2)$$

dimana κ adalah sebuah sebuah fungsi:

$$\kappa = \kappa(p) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2\phi}} \quad \text{........................} \quad (3)$$

dimana:
ϕ = sebuah variabel yang didefinisikan sebagai p sin ϕ = sin (θ/2)
θ = sudut rotasi batang.

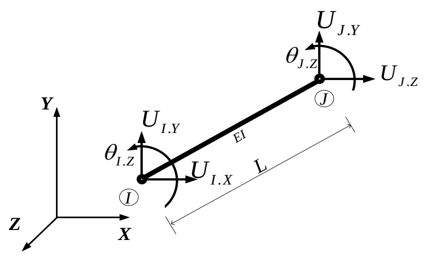
Persamaan (3) dapat dihitung menggunakan tabel integral ellips (*elliptic integrals*). Timoshenko & Gere (1961) menyusun tabel hubungan beban kritis kolom P_{cr} dengan perpindahan vertikal δv dan horizontal δh, Persamaan (2) dan Persamaan (3) untuk kolom bertumpuan jepit-bebas dengan ringkasan seperti pada Tabel 1. Berdasarkan Tabel 1 ini dapat digunakan untuk kasus kolom bertumpuan sendi-rol pada kedua ujungnya dengan menggantikan panjang kolom L dengan 0.5*L.

Tabel 1. Data hubungan beban-perpindahan *buckling* pada batang kolom (*buckled bar*) (Timoshenko & Gere,1961).

α	0^0	20^0	40^0	60^0	80^0
P/P_{cr}	1.00	1.015	1.063	1.152	1.293
δ_v/L	1.00	0.970	0.881	0.741	0.560
δ_h/L	0.00	0.220	0.422	0.593	0.719
α	100^0	120^0	140^0	160^0	176^0
P/P_{cr}	1.518	1.884	2.541	4.029	9.116
δ_v/L	0.349	0.123	-0.107	-0.340	-0.577
δ_h/L	0.792	0.803	0.750	0.625	0.421

Pemodelan elemen hingga kolom

Jenis elemen yang digunakan untuk pemodelan kolom dalam penelitian ini adalah elemen balok-kolom BEAM3 (ANSYS, 2006) yang memiliki 2 titik nodal tiap elemen, masing-masing titik nodal memiliki 3 derajat kebebasan, yaitu: translasi nodal pada sumbu X dan pada sumbu Y serta rotasi terhadap sumbu Z, dinotasikan dengan U_x, U_y, θ_z (atau ROT_Z), ditunjukkan pada Gambar 3. Data elemen BEAM3 meliputi: luas penampang, momen inersia, tinggi penampang dan propertis material. Jenis elemen BEAM3 yang dipilih dalam penelitian ini dengan memperhitungkan pengaruh nonlinier lendutan besar dan pengaruh penguatan tegangan dalam analisis *buckling*.



Gambar 3. Notasi derajat kebebasan titik nodal pada elemen batang 2 dimensi untuk pemodelan kolom.

Analisis *eigen buckling* elemen hingga

Analisis *linear buckling* disebut juga *eigenvalue buckling* merupakan metode yang digunakan untuk mendapatkan beban kritis *buckling* dari titik bifurkasi (*bifurcation point*) pada struktur elastis-linier. Metode elemen hingga untuk mendapatkan beban kritis dan ragam bentuk *buckling* dilakukan dengan menyelesaikan persamaan kesetimbangan homogen (Cook, 1981; Weaver dan Johnston, 1984 ; ANSYS, 2009):

$$([K_0] + \lambda_k [K_\sigma])\{P\} = \{0\} \quad \text{.................................} \quad (4)$$

dimana:
$[K_0]$ = matriks kekakuan umum
$[K_\sigma]$ = matriks kekakuan tegangan atau matriks geometri
λ_k = nilai eigen yaitu faktor ragam bentuk *buckling mode shape*.

Beban *buckling* dari hasil penyelesaian *eigen value* yang diturunkan dari Persamaan (4) biasanya diambil yang terkecil $\{P_{cr}\}=\lambda_k \{P\}$.

Prosedur analisis *eigenvalue linear buckling* dengan Program ANSYS adalah (ANSYS, 2009):

a. bentuk model stuktur masukkan data koordinat titik nodal, *real constants*, propertis material, elemen dan kondisi tumpuan;
b. lakukan solusi statis aktifkan matriks kekakuan tegangan “PRESTRES, ON”, berikan beban satuan dan selesaikan;
c. lakukan solusi *eigenvalue buckling* mengaktifkan analisis *eigenvalue buckling* dengan perintah “ANTYPE, BUCKLE”. Gunakan pilihan metode iterasi “BUCOPT, LANB” menggunakan metode iterasi subspace Lanczos;
d. perluas solusi *eigenvalue buckling* untuk ragam lainnya dengan perintah “MXPAND”;
e. review hasil untuk mendapatkan faktor beban *buckling* dan bentuk ragam *buckling*.

Analisis nonlinier geometri elemen hingga

Pada analisis nonlinier geometri metode elemen hingga, persamaan kesetimbangan dilakukan pada konfigurasi akhir dan solusi yang digunakan untuk mendapatkan hubungan beban-perpindahan dengan formulasi inkremental dari teori Lagrangian. Matriks kekakuan elemen dan vektor beban diturunkan menggunakan sebuah formulasi *Updated Lagrangian*. Prosedur selengkapnya telah diturunkan oleh Bathe (1982) dan ANSYS (2009).

Metode nonlinier elemen hingga menggunakan persamaan matriks dengan prosedur beban bertahap. Persamaan kesetimbangan struktur pada tahap beban ke-n dan iterasi ke-i adalah:

$[K_i^T]\{\Delta u_i\}=\{F^a\}-\{F_i^{nr}\}$ .... (5)

dimana:
$[K_i^T]$ = matriks kekakuan tangent
i dan n = subskrip yang menunjukkan urutan iterasi ke-i, dan step atau tahapan beban ke-n
$\{F_i^{nr}\}$ = vektor beban pemulihan (*restoring loads)* sesuai dengan gaya atau tegangan elemen.

$[K_i^T]$ dan $\{F_i^{nr}\}$ dievaluasi berdasarkan nilai perpindahan $\{\Delta u_i\}$ yang diberikan. Ruas kanan Persamaan(4) adalah residu atau vektor beban *out-of-balance.*

Untuk mengatasi masalah respon struktur setelah titik kritis pada *post-buckling* digunakan metode Newton-Raphson dengan teknik solusi panjang busur *contant arc-length* yang dikembangkan oleh Crisfield dari metode sebelumnya oleh Wempner dan Risk (Crisfield, 1980).

Prosedur analisis analisis elemen hingga nonlnier dengan program komputer ANSYS APDL secara garis besar adalah sebagai berikut:

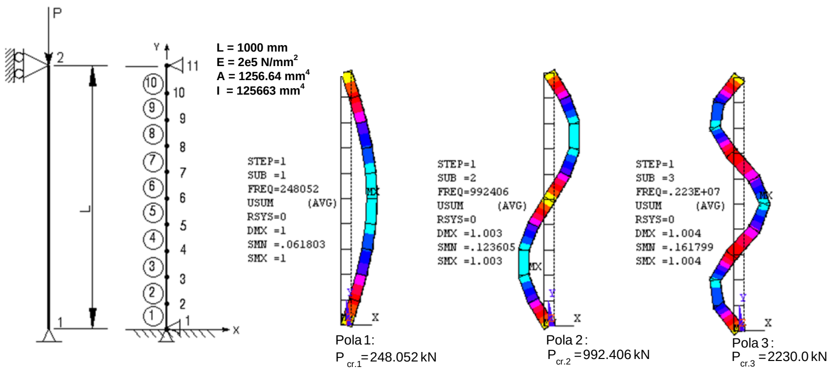
a. Penentuan model elemen hingga: definisi titik nodal, elemen dan pembagian elemen (meshing), propertis material serta kondisi batas dalam format input data;
b. Formulasi matriks kekakuan elemen dan matriks kekakuan struktur serta solusi persamaan kesetimbangan;
c. Analisis hasil: perpindahan, gaya elemen dan reaksi tumpuan;
d. Penyajian hasil: pengurutan data dan hasil, penyajian dalam bentuk tabel dan gambar deformasi maupun penggambaran grafik relasi antar variabel.

Hasil dan Pembahasan

Beban kritis *linear buckling*

Beban kritis *buckling* dapat diprediksi dengan menghitung nilai-nilai eigen (*eigenvalues*) struktur berdasarkan data propertis dan kondisi tumpuan yang ditentukan. Dalam studi ini analisis elemen hingga juga dilakukan untuk memperoleh hasil *linear buckling* kolom.

Hasil analisis *eigen linear buckling* terhadap kolom tunggal ditumpu sederhana pada kedua ujungnya disajikan pada Gambar 4. Beban kritis juga dapat dihitung berdasarkan rumus Euler pada Persamaan (1). Dengan data kolom seperti pada Gambar 1 diperoleh beban kritis dari Persamaan (1) Pcr = 248.049 kN. Dari hasil analisis *linear buckling* dengan model elemen hingga 10 elemen dengan jenis elemen BEAM3 diperoleh hasil P_{cr}= 248.052 kN untuk ragam bentuk 1. Sedangkan untuk ragam bentuk 2 dan 3 hasilnya lebih besar, sehingga yang menentukan ragam bentuk 1. Perbedaan hasil antara rumus Euler dengan analisis *linear buckling* metode elemen hingga dalam hal ini sangat kecil yaitu 0.0007%. Hal ini menunjukkan bahwa pemilihan jumlah elemen (10 buah) dan jenis elemen batang (BEAM3) pada penelitian ini cukup akurat.



a. Model elemen hingga **b. Pola bentuk deformasi 1, 2dan 3**

Gambar 4. Hasil analisis *linear buckling* struktur kolom

Analisis *nonlinier post-buckling*

Hasil analisis elemen hingga *nonlinear* kolom dapat menggambarkan perilaku kolom hubungan beban-perpindahan tahap *post-buckling*. Berbeda dengan analisis *eigen linear buckling* yang hanya untuk mengetahui besarnya beban *buckling* dan pola deformasi geometri, hasil analisis elemen hingga *nonlinear* dapat menggambarkan perilaku beban terhadap perpindahan pada setiap tahap pembebanan yang telah memperhitungkan pengaruh lendutan besar (*large-deflection*).

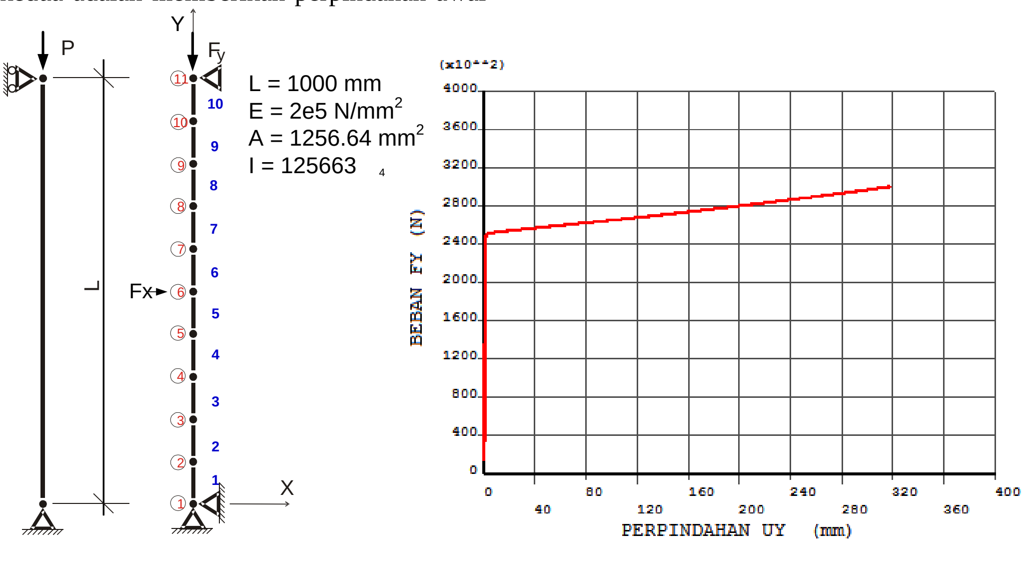
Analisis elemen hingga kolom dilakukan dengan model sebagaimana terlihat pada Gambar 1. Pembagian jumlah elemen sebanyak 10 buah dan jumlah titik nodal 11 buah. Jumlah titik dipilih 11 buah agar beban lateral horizontal dapat dikerjakan tepat di tengah panjang batang yaitu 0.5 L.

Besarnya beban awal F_y dalam analisis nonlinier diprediksi berdasarkan beban kritis rumus Euler. Cara untuk membangkitkan terjadinya *buckling* dalam analisis nonlinier yang digunakan dalam penelitian ini ada 2 macam yaitu, cara pertama dengan memberikan sentuhan gaya horizontal yang sangat kecil F_x di titik tengah tinggi kolom. Beban horizontal F_x diambil sangat kecil disimulasi untuk 3 jenis yaitu $1x10^{-3}$, $1x10^{-4}$ dan $1x10^{-5}$ dari beban aksial F_y yang bekerja. Cara yang kedua adalah memberikan perpindahan awal maksimum yang sangat kecil yaitu antara 1/200*L sampai 1/1000*L di tengah tinggi kolom.

Perilaku beban-perpindahan P-U_y dan P-U_x

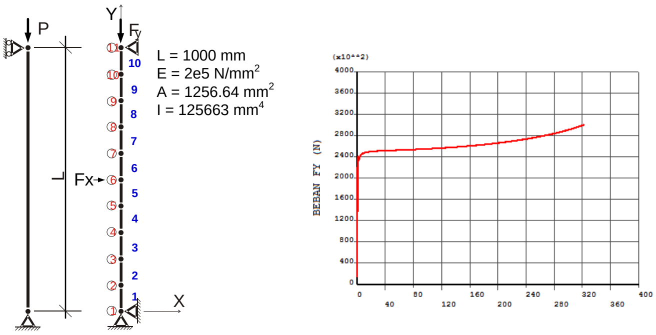
Hasil analisis perilaku beban-perpindahan vertikal P-U_y atau F_y-U_y disajikan pada Gambar 5. Pada tahap beban F_y mulai nol sampai beban mendekati beban kritis P_{cr} struktur berperilaku linier ditunjukkan dengan kurva garis lurus. Kemiringan garis ini merupakan kekakuan aksial kolom *pre-buckling*. Beban kritis *buckling* tercapai pada P_{cr}=F_y=251.501 kN dengan perpindahan U_y=1.000 mm. Penambahan beban sedikit di atas beban kritis P_{cr} menghasilkan tambahan perpindahan yang besar. Pada beban *post-buckling* P=267.123 kN perpindahan vertikal sebesar U_y=117.784 mm, sedangkan untuk beban *post-buckling* P=288.127 kN perpindahan vertikal sebesar U_y=255.013mm.

Kurva beban-perpindahan horizontal P-U_x atau F_y-U_x kolom disajikan pada Gambar 6. Beban yang dikerjakan adalah P atau F_y yang menghasilkan perpindahan horisontal di titik tengah kolom $U_{x(6)}$. Beban kritis *buckling* tercapai pada P_{cr}=251.501 kN dengan perpindahan horisontal $U_{x(6)}$=7.707 mm. Pada beban *post-buckling* P=274.123 kN perpindahan horisontal sebesar $U_{x(6)}$= 10.319 mm, sedangkan untuk beban P=288.127 kN perpindahan horisontal sebesar $U_{x(6)}$=295.555 mm.



b. Model elemen hingga kolom **a. Kurva beban-perpindahan vertical Fy-Uy**

Gambar 5. Geometri dan kurva beban perpindahan vertikal (F_y-U_y) struktur kolom.



a. Model elemen hingga kolom **b. Kurva beban-perpindahan vertical Fy-Uy**

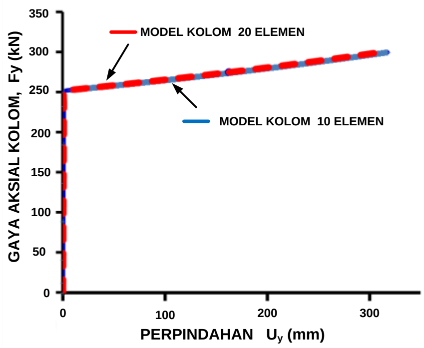
Gambar 6. Geometri dan kurva beban perpindahan horizontal (F_y-U_x) struktur kolom.

Perbedaan bentuk kurva F_y - U_y dan F_y - U_x pada Gambar 5 dan Gambar 6 adalah:

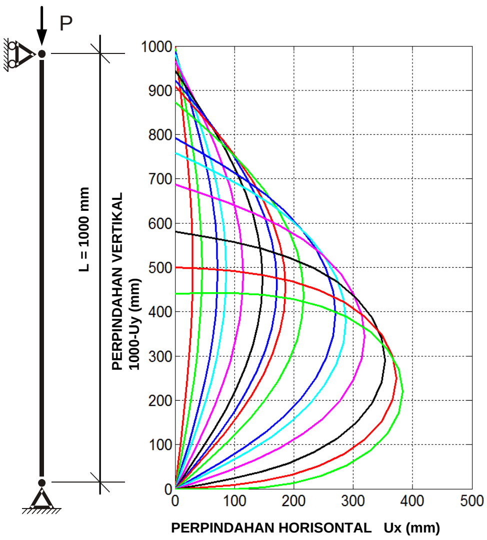
a. kurva *pre-buckling* yaitu kurva sebelum titik bifurkasi *buckling* untuk F_y - U_y berupa garis lurus atau hampir lurus, sedangkan kurva *pre-buckling* F_y - U_x berupa kurva lengkung. Kurva *pre-buckling* F_y - U_y linier karena sebelum terjadi *buckling* perpindahan vertikal diperoleh dari perpendekan batang, yaitu $U_y=F_yL/(EA)$ yang merupakan hubungan linier antara F_y - U_y karena L, E dan A konstan. Sedangkan hubungan antara beban F_y-U_x bersifat nonlinier geometri;
b. kurva *post-buckling* yaitu kurva setelah titik bifurkasi *buckling* untuk F_y - U_x berupa lengkung pengerasan ke atas, sedangkan untuk kurva F_y - U_y cenderung linier berupa garis lurus.

Untuk menguji perbedaan jumlah elemen pemodelan kolom maka dilakukan studi perbandingan antara jumlah elemen 10 buah dan 20 buah dengan data kolom yang sama. Hasil analisis kurva F_y–U_y perbandingan antara 10 elemen dan 20 elemen disajikan dalam kurva pada Gambar 7. Dari gambar ini terlihat kurva F_y – U_y antara pemodelan 10 elemen dan 20 elemen berimpit, yang berarti perbedaannya tidak signifikan.

Gambar 8 menyajikan deformasi arah x dan arah y struktur kolom dalam studi ini dari hasil analisis elemen hingga nonlinier geometri. Pada perpindahan vertikal ujung atas kolom Uy=0.259 L; perpindahan horizontal di tengah kolom mencapai Ux=0.295 L. Hasil analisis *The elastica* beam dari Timoshenko dan Gere (1961) Uy=0.297 L, dengan perbedaan yang relatif kecil yaitu 0.67%. Bentuk deformasi kolom elastis seperti Gambar 8 juga untuk kolom elastis yang lain dapat dijumpai pada Tongyun (2004).



Gambar 7. Perbandingan kurva beban-perpindahan vertikal (F_y-U_y) hasil analisis nonlinier kolom B01 antara model 10 elemen dan 20 elemen.



Gambar 8. Deformasi horizontal dan vertikal riwayat beban struktur kolom elastis nonlinier.

Persamaan kurva hubungan beban - perpindahan vertikal kolom

Hubungan beban-perpindahan aksial kolom dapat diturunkan secara matematik berdasarkan teori lendutan besar (*large deflection*. Persamaan hubungan beban-perpindahan aksial kolom elastis lendutan besar yang ditumpu sendi-rol pada kedua ujungnya dirumuskan sebagai berikut (Bazant dan Cedolin,1991); Timoshenko dan Gere, 1961):

$$P = P_{cr} + \frac{P_{cr}}{2 + P_{cr}/(EA)}(u/L) \; ; \quad P \geq P_{cr} \quad \text{....................} \quad (6)$$

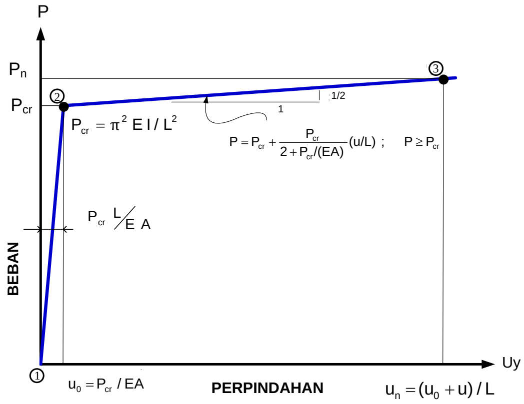
dimana:
$P_{cr} = \pi^2 \, EI / L^2$ adalah beban kritis kolom dari rumus Euler.

Persamaan (6) dapat disajikan dalam bentuk kurva beban perpindahan F_y – U_y pada Gambar 9. Bila titik 1 dengan titik 2 dan titik 2 dengan titik 3 pada kurva F_y – U_y Gambar 9 dihubungkan dengan garis lurus maka diperoleh hubungan F_y – U_y sebagai kurva bilinier 1–2–3. Dengan memperhatikan hasil analisis elemen hingga nonlinier untuk kolom dalam studi ini dan memperhatikan Persamaan (6) serta mengambil data hasil analisis *elastica (buckled-bar)* dari Timoshenko dan Gere (1961) maka diusulkan sebuah kurva bilinier F_{y}-U_y untuk kolom elastis disajikan pada Gambar 9.

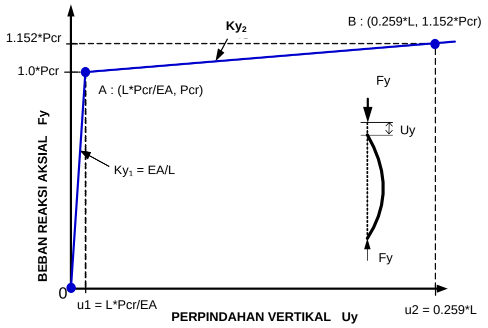
Verifikasi terhadap model kurva bilinier F_y – U_y Gambar 10 untuk kolom elastis dilakukan dengan membandingkan kurva beban-perpindahan F_y – U_y sebagai berikut: (a) Model FEM dengan sentuhan gaya Fx; (2) Model FEM dengan perpindahan awal δx; (3) Model bilinier; (4) Teori *elastica* Timoshenko & Gere (1961); (5) Bazant & Cedolin (1991). Kurva perbandingan disajikan pada Tabel 2 dan Gambar 11.

Nilai perbandingan P/P_{cr} model F_y – U_y bilinier pada perpindahan antara 0.03 u_y/L sampai 0.259 u_y/L berada di tengah-tengah antara model (1) dan (2) dengan (4) dan (5). Pada perpindahan u_y/L=0.259 nilai P/P_{cr} sama antara model bilinier (3) dengan model (4) teori elastica Timoshenko dan Gere (1961). Hal ini karena model (3) mengambil koordinat pada u_y/L=0.259 pada model Timoshenko dan Gere (1961) sebagai kemiringan garis *post-buckling*. Dari Gambar 4.48 dan 4.49 terlihat bahwa lima model kurva F_y - U_y relatif hampir berimpit. Bila dilihat secara detail perbedaan P/P_{cr} antar kurva terbesar adalah 8.2%.

Kurva beban-perpindahan vertikal F_y - U_y hasil analisis nonlinier elemen hingga kolom serta model bilinier F_y - U_y Gambar 10 dalam penelitian ini digunakan model *nonlinear spring* kolom elastis elemen hingga.



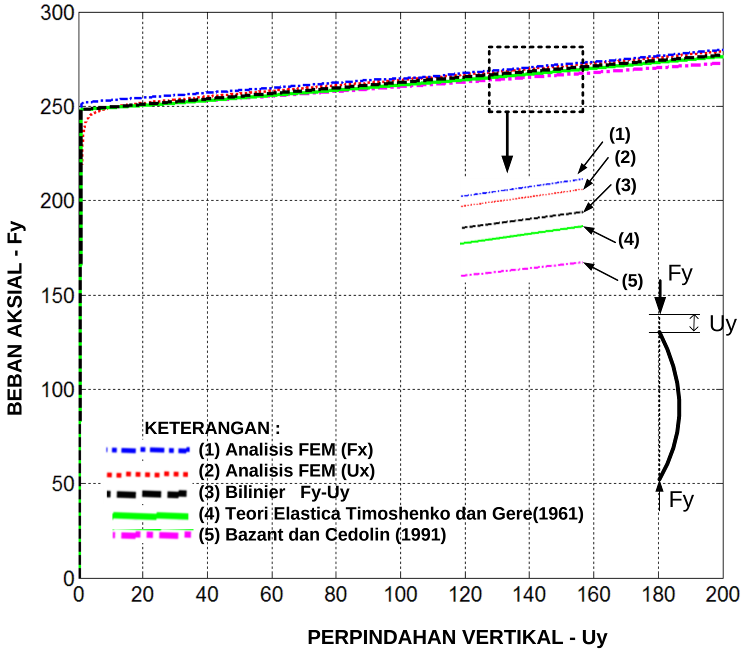
Gambar 9. Model bilinier kurva beban-perpindahan aksial P - U_y, dari model Bazant dan Cedolin(1991).



Gambar 10. Model kurva bilinier beban-pepindahan vertikal kolom F_y - U_y yang diusulkan.

Tabel 2. Perbandingan koordinat kurva P-Uy kolom non-dimensional.

No	Model	Titik kritis		u_{y2}/L=0.03		u_{y3}/L=0.119		u_{y4}/L=0.259	
		u_{y1}/L	P_{cr1}/P_{cr}	u_{y2}/L	P_2/P_{cr}	u_{y3}/L	P_3/P_{cr}	u_{y4}/L_r	P_4/P_{cr}
1	Analisis FEM; sentuhan Fx	1.000e-3	1.014	0,03	1.031	0,117	1.077	0,255	1.161
2	Analisis FEM; perpindahan awal, δx	3.188e-3	0,984	0,03	1.022	0,119	1.075	0,259	1.164
3	Bi-linier; Fy-Uy	0.987e-3	1.000	0,03	1.018	0,119	1.070	0,259	1.152
4	Teori Elastica, Timoshenko dan Gere (1961)	0.987e-3	1.000	0,03	1.015	0,119	1.063	0,259	1.152
5	Bazant dan Cedolin (1991)	0.987e-3	1.000	0,03	1.015	0,119	1.059	0,259	1.076



Gambar 11. Perbandingan kurva beban-pepindahan vertikal kolom F_y - U_y.

Kesimpulan

Dari hasil dan pembahasan diatas dapat disimpulkan:

1. Kurva hubungan beban-perpindahan lateral tahap *post-buckling* kolom lengkung ke arah penguatan *(stiffening)* sedangkan kurva beban-perpindahan aksial cenderung linier.

2. Perbandingan kurva beban-perpindahan aksial antara hasil analisis nonlinier lendutan besar metode elemen hingga dengan kurva linier dari Timoshenko dan Gere (1961) dan Bazant & Cedolin (1991) menunjukkan kurva yang hampir berimpit. Dari hasil penelitian ini diusulkan sebuah kurva hubungan beban-perpindahan aksial bilinier kolom pada Gambar 10 yang dapat dipakai sebagai model elemen *nonlinear spring* pada analisis elemen hingga struktur gabungan pada *frame* atau rangka batang.

3. Tidak terdapat perbedaan signifikan pada kurva beban-perpindahan aksial antara hasil analisis *nonlinear buckling* dengan cara pembangkit awal *buckling* antara beban lateral awal yang sangat kecil dengan deformasi lateral awal yang sangat kecil.

4. Perbandingan hasil antara hasil analisis elemen hingga *linear buckling* dengan hasil rumus Euler relatif kecil (kurang dari 0.0007%). Hal ini menunjukkan bahwa pemilihan jumlah elemen (10 buah) dan jenis elemen balok-kolom (BEAM3) pada penelitian ini cukup akurat.

Ucapan terima kasih

Penelitian ini merupakan bagian dari penelitian disertasi pada Program Doktor Teknik Sipil Universitas Dinonegoro Semarang, Indonesia. Ucapakan terimakasih kepada Kepala Laboratorium Perancangan dan Tribologi dan dosen Jurusan Teknik Mesin Universitas Diponegoro Semarang atas ijin dan bantuannya dalam penelitian ini menggunakan fasilitas simulasi komputasi numerik *Finite Element Method* (*FEM*) dengan Program ANSYS *Release* 12.0.

Daftar Pustaka

ANSYS, 2009. *Theory Reference for the Mechanical APDL and Mechanical Applications, Release 12.1*, ANSYS, Inc. Southpointe 275 Technology Drive, Canonsburg.

Bathe, K.J., 1982. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey.

Bazant, Z.P., 2000. *Stability of Elastic, Anelastic, and Disintegrating Structures*, Zamm Z. Angew. Math. Mech. 80 (2000) 11-12, 709-732.

Chajes, A., 1974. *Principles of Structural Stability Theory*. Englewood Cliffs, Inc. New Jersey.

Cook, R.D., 1981. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis* . John Wiley & Sons Inc. USA.

Crisfield, M.A., 1980. *A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure that Handles "Snap-Through*. Computer and Structures Vol.13 pp.55-62, England.

Crisfield, M.A., 2000. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures - Volume 1 : Essestials* . John Wiley & Sons, England.

Timoshenko, S. P., dan Gere, J.M., 1961. *Theory of Elastic Stability,* McGraw-Hill Book Company, Inc. New York.

Tongyun, W., 2004.*A Numerical Studi of Elastica Using Constrained Optimization Methods*, Thesis, Department of Civil Engineering, National University of Singapore.

Weaver,W.Jr., dan Johnston, P.R., 1984. *Finite Elements for Structural Analysis*. Prentice Hall, Inc., New Jersey.