

## Pengembangan *Equivalent Plate Model* Guna Analisis Dinamis Struktur *Wing-Box* dengan Material Komposit

Ismoyo Haryanto, Reni, Achmad Widodo

Departemen Teknik Mesin, Fakultas Teknik, Universitas Diponegoro

Jl. Prof. Sudharto, SH., Tembalang-Semarang 50275, Telp. +62247460059

E-mail:

### Abstrak

Pada penelitian ini analisis getaran bebas dilakukan pada struktur *wing-box* yang dibuat menggunakan material komposit. Analisis yang didasarkan pada *Equivalent-plate model* dengan *first-order shear deformation theory* berdasarkan Reissner-Mindlin dilakukan untuk mendapatkan frekuensi pribadi dan modus getar dari struktur sayap pesawat udara tersebut. Pada studi ini *wing-box* yang ditinjau dimodelkan terdiri dari laminat yang tidak simetris. Persamaan gerak diturunkan dari Persamaan Lagrange untuk getaran bebas. Validasi dilakukan pada hasil analisa terhadap data yang diperoleh pada literatur. Hasil validasi menunjukkan kesesuaian antara hasil analisa yang dilakukan terhadap data pada literatur.

**Kata kunci:** *Equivalent-plate model*, *wing-box*, material komposit, Getaran bebas

### 1. Pendahuluan

Penggunaan material komposit banyak dijumpai dalam industri penerbangan karena material komposit memiliki beberapa kelebihan jika dibandingkan dengan material isotropik (seperti aluminium). Kelebihan utama material komposit ialah rasio kekuatan-massa (kekuatan jenis) dan kekakuan-massa (kekakuan jenis) yang tinggi. Hal tersebut pula yang mendasari penggunaan material komposit dalam industri penerbangan [1], contohnya ialah penggunaan material komposit pada struktur sayap pesawat udara dimana berat dari struktur pesawat udara merupakan faktor yang penting. Material komposit memiliki kemampuan yang sama seperti material isotropik tetapi dapat membuat struktur menjadi jauh lebih ringan, serta sifatnya yang lebih tahan terhadap lingkungan dibandingkan dengan logam [2]. Selain itu, untuk jenis material komposit dengan bahan penguat berupa serat seperti komposit laminat, sifat material bergantung dari susunan arah serat tiap lamina, sehingga dapat disesuaikan untuk memperoleh kekuatan dan kekakuan dari struktur yang diperlukan. Sehingga, agar efisien dalam penggunaannya, maka perlu dilakukan analisa struktur ketika diberi pembebanan, salah satunya ialah analisa dinamis dari struktur.

Analisa elemen hingga (*Finite Element Analysis* atau FEA) merupakan salah satu analisa yang paling banyak digunakan dalam menganalisa struktur. Metode ini dapat menganalisa perpindahan, tegangan, regangan, getaran dan analisa lainnya pada struktur, selain itu cukup detail jika digunakan untuk menganalisa struktur pada langkah akhir dari proses mendesain [3]. Analisa ini membagi struktur menjadi elemen-elemen kecil (diskritisasi) yang terhubung oleh titik-titik (*nodes*). Nilai analisa yang didapat hanya merupakan nilai pada titik-titik tersebut, sehingga analisa ini tidak bersifat kontinu. Dalam menganalisa gaya-gaya aerodinamis, juga dilakukan diskritisasi. Dengan memisalkan titik-titik hasil diskritisasi pada analisa struktur sebagai "Titik-titik A" dan titik-titik hasil diskritisasi pada analisa aerodinamis dinamai "Titik-titik B", maka ketika hasil analisa struktur digunakan dalam analisa gaya-gaya aerodinamis pada struktur, ada kemungkinan "Titik-titik A" tidak berhimpit dengan "Titik-titik B". Sedangkan untuk menganalisa gaya-gaya aerodinamis (pada "Titik-titik B") diperlukan nilai analisa struktur pada "Titik-titik B" tersebut. Sehingga nilai-nilai hasil analisa struktur (pada "Titik-titik A") perlu diinterpolasi terlebih dahulu untuk mendapatkan nilai-nilai pada "Titik-titik B".

Berbeda dengan FEA yang membagi struktur menjadi elemen-elemen kecil, analisa struktur dengan menggunakan metode pendekatan pelat (*Equivalent Plate Model* atau EPM) tidak mendiskritisasi struktur. Analisa dengan metode ini bersifat kontinu, nilai yang didapat bukan hanya nilai pada "Titik-titik A" tetapi pada setiap titik pada struktur. Sehingga nilai-nilai analisa struktur pada "Titik-titik B" yang diperlukan untuk analisa gaya-gaya aerodinamis dapat langsung diperoleh tanpa proses interpolasi. Maka, untuk kasus yang melibatkan faktor aerodinamis dari suatu struktur, metode EPM ini lebih efisien dibandingkan dengan FEA.

*Equivalent Plate Model* atau EPM merupakan salah satu metode analitik yang digunakan untuk menganalisa struktur dengan material komposit laminat. Terdapat beberapa penelitian dalam menganalisa struktur baik dengan material isotropik maupun komposit laminat, baik menggunakan metode analitik seperti EPM maupun metode numerik seperti FEA, seperti yang dilakukan oleh Kant dan Swaminathan [4], mereka menggunakan *Higher-order Refined Theory* untuk menganalisa pelat dan sandwich plates dengan material komposit laminat. *Classical Laminate Theory* (CLT) yang digunakan oleh Rojas [2] untuk menganalisa struktur beams dengan material komposit laminat. Na dan Shin [3], mereka menggunakan EPM untuk menganalisa struktur sayap pesawat udara yang memiliki control surface dimana bagian *skins* sayap pesawat udara menggunakan material komposit laminat sedangkan *spars* dan *ribs*

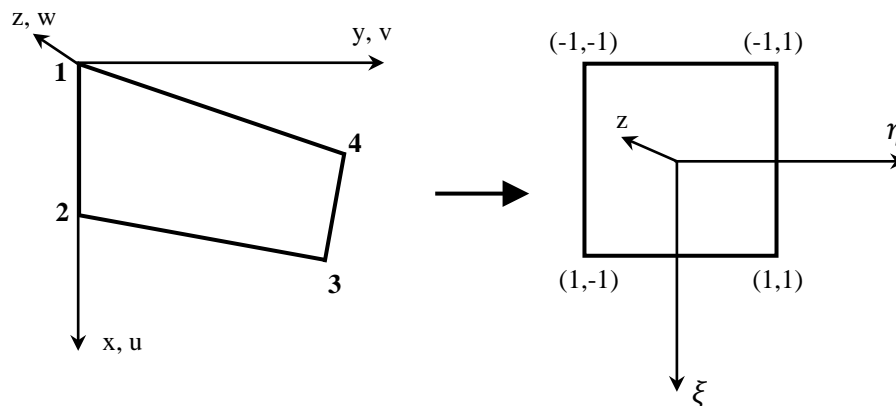
menggunakan material isotropik. Liu [5] menggunakan EPM dengan *First-order Shear Deformation Theory* (FSDT) yang berdasarkan pada metode Reissner-Mindlin untuk menganalisa struktur sayap pesawat udara dengan material isotropik. Serta Vo dan Lee [6] yang melakukan analisa pada *thin-walled box beams* dengan material komposit laminat.

Penelitian tentang penggunaan EPM untuk analisa struktur maupun analisa struktur dengan material komposit laminat telah banyak dilakukan, akan tetapi penggunaan EPM untuk menganalisa struktur *wing-box* dengan material komposit laminat masih jarang dilakukan. Oleh karena itu, pada penelitian ini analisa dinamis pada struktur *wing-box* dengan material komposit laminat dilakukan dengan pemodelan EPM yang diprogramkan dengan menggunakan software MATLAB. Pemodelan EPM ini dilakukan dengan menggunakan *First-order Shear Deformation Theory* (FSDT) yang berdasarkan pada metode Reissner-Mindlin. Analisa dilakukan untuk mendapatkan frekuensi pribadi dan modus getar struktur tersebut, dan hasilnya dibandingkan dengan nilai yang diperoleh dari literatur.

**2. Model Matematika**

**2.1. Equivalent Plate Model**

*Equivalent plate model* memodelkan struktur sayap pesawat sebagai sebuah pelat seperti pada Gambar 1. Koordinat x,y,z ditransformasikan menjadi koordinat  $\xi, \eta, z$ .



**Gambar 1.** Koordinatsistemdantransformasi [5].

Transformasi bidang 1,2,3,4 pada koordinat x, y, z seperti pada Gambar 1. Menjadi kotak dalam koordinat  $\xi, \eta, z$ . Dapat diformulasikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 x &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i \\
 y &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

dimana,

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\
 N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\
 N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\
 N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Matriks Jacobian untuk transformasi ini sebagai berikut:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}
 \tag{3}$$

Invers dari matriks Jacobian seperti pada persamaan (4) berikut ini:

$$[J]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}}{|J|} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{J}_{11} & \bar{J}_{12} \\ \bar{J}_{21} & \bar{J}_{22} \end{bmatrix}
 \tag{4}$$

dimana  $|J|$  merupakan determinan dari matriks Jacobian. Maka turunan suatu fungsi terhadap  $\xi$  dan  $\eta$  dapat dituliskan seperti pada persamaan (5).

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = [J]^T \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \\ \therefore \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} &= ([J]^T)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{pmatrix} = ([J]^{-1})^T \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{J}_{11} & \bar{J}_{21} \\ \bar{J}_{12} & \bar{J}_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

**2.2. First-order Shear Deformation Theory (FSDT)**

FSDT berdasarkan metode Reissner-Mindlin untuk sebuah pelat mengasumsikan bahwa perpindahan yang terjadi dalam arah z linier dan *plane stress* pada arah tersebut. Berdasarkan asumsi tersebut maka persamaan untuk perpindahan yang terjadi dalam arah x,y, dan z seperti berikut.

$$\begin{aligned} u(x, y, x, t) &= u_0(x, y, t) + z\theta_x(x, y, t) \\ v(x, y, x, t) &= v_0(x, y, t) + z\theta_y(x, y, t) \\ w(x, y, x, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \tag{6}$$

Persamaan untuk regangan dapat diturunkan dari persamaan (6)

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x^0 + z\kappa_x \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_y^0 + z\kappa_y \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \epsilon_{xy}^0 + z\kappa_{xy} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_{zx}^0 \end{aligned} \tag{7}$$

dimana,

$$\begin{aligned} (\epsilon_x^0, \epsilon_y^0, \epsilon_{xy}^0) &= \left( \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial v_0}{\partial y}, \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \\ (\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}) &= \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \frac{\partial \theta_y}{\partial y}, \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \right) \\ (\gamma_{zx}^0, \gamma_{yz}^0) &= \left( \theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}, \theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \end{aligned} \tag{8}$$

Besarnya  $u_0, v_0, w_0, \theta_x$ , dan  $\theta_y$  didefinisikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} u_0 &= \{B_{IJ}\}^T \{q_U\} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J U_{ij}(t) B_i(\xi) B_j(\eta) \\ v_0 &= \{B_{KL}\}^T \{q_V\} = \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L U_{kl}(t) B_k(\xi) B_l(\eta) \\ w_0 &= \{B_{MN}\}^T \{q_W\} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N U_{mn}(t) B_m(\xi) B_n(\eta) \\ \theta_x &= \{B_{PQ}\}^T \{q_X\} = \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q U_{pq}(t) B_p(\xi) B_q(\eta) \end{aligned} \tag{9}$$

$$\theta_y = \{B_{RS}\}^T \{q_Y\} = \sum_{r=1}^R \sum_{s=1}^S U_{rs}(t) B_r(\xi) B_s(\eta)$$

dimana  $I, J, K, L, M, N, P, Q, R$  dan  $S$  adalah bilangan bulat,  $\{q\}$  merupakan *generalized displacement vector*, dan  $\{B\}$  merupakan *Ritz base function vector* dan dibangun dengan menggunakan persamaan polinomial Chebyshev.

**2.3. Matriks Kekakuan dan Massa**

Matriks kekakuan diturunkan dari persamaan energi regangan seperti berikut ini:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV \tag{10}$$

Berdasarkan Hukum Hooke, maka hubungan antara tegangan-regangan dapat dituliskan  $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$ , dimana  $[D]$  merupakan matriks tegangan-regangan atau biasa disebut sebagai matriks *constitutive*. Maka  $\{\sigma\}^T = \{\varepsilon\}^T [D]^T$ , dengan mengasumsikan  $[D]^T = [D]$  maka persamaan (10) menjadi seperti berikut ini:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV \tag{11}$$

Jika  $\{\varepsilon\} = [T]\{\bar{\varepsilon}\}$ , maka nilai  $[T]$  dan  $\{\bar{\varepsilon}\}$  dituliskan seperti pada persamaan (12) dan (13).

$$[T] = \begin{bmatrix} \bar{J}_{11}\bar{J}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{J}_{12}\bar{J}_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{J}_{12}\bar{J}_{22}\bar{J}_{11}\bar{J}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{J}_{11}\bar{J}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{J}_{12}\bar{J}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{J}_{12}\bar{J}_{22}\bar{J}_{11}\bar{J}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{J}_{12}\bar{J}_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{J}_{11}\bar{J}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\{\bar{\varepsilon}\} = \begin{bmatrix} \partial u_0 / \partial \xi \\ \partial u_0 / \partial \eta \\ \partial v_0 / \partial \xi \\ \partial v_0 / \partial \eta \\ \partial w_0 / \partial \xi \\ \partial w_0 / \partial \eta \\ \partial \theta_x / \partial \xi \\ \partial \theta_x / \partial \eta \\ \partial \theta_y / \partial \xi \\ \partial \theta_y / \partial \eta \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J U_{ij}(t) B'_i(\xi) B_j(\eta) \\ \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J U_{ij}(t) B_i(\xi) B'_j(\eta) \\ \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L U_{kl}(t) B'_k(\xi) B_l(\eta) \\ \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L U_{kl}(t) B_k(\xi) B'_l(\eta) \\ \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N U_{mn}(t) B'_m(\xi) B_n(\eta) \\ \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N U_{mn}(t) B_m(\xi) B'_n(\eta) \\ \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q U_{pq}(t) B'_p(\xi) B_q(\eta) \\ \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q U_{pq}(t) B_p(\xi) B'_q(\eta) \\ \sum_{r=1}^R \sum_{s=1}^S U_{rs}(t) B'_r(\xi) B_s(\eta) \\ \sum_{r=1}^R \sum_{s=1}^S U_{rs}(t) B_r(\xi) B'_s(\eta) \\ \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q U_{pq}(t) B_p(\xi) B_q(\eta) \\ \sum_{r=1}^R \sum_{s=1}^S U_{rs}(t) B_r(\xi) B_s(\eta) \end{bmatrix} = [C]\{q\} \tag{13}$$

Maka persamaan (11) dapat kita tuliskan seperti berikut.

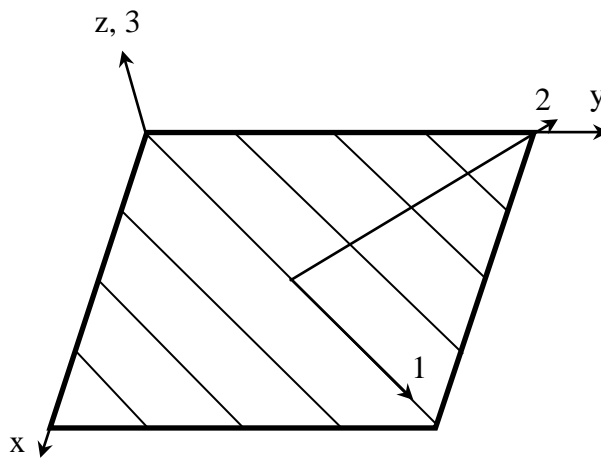
$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \{q\}^T [C]^T [T]^T [D] [T] [C] \{q\} dV = \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\} \tag{14}$$

dimana  $[K]$  merupakan matriks kekakuan seperti pada persamaan (15).

$$[K] = \iiint_V [C]^T [T]^T [D] [T] [C] dx dy dz \tag{15}$$

Pada Gambar 2 diperlihatkan contoh dari koordinat lamina dari suatu lapisan material komposit laminat dengan arah serat tertentu. Arah 1 merupakan arah yang sejajar terhadap arah serat, arah 2 merupakan arah yang tegak lurus terhadap arah serat, dan dalam bidang yang sama dengan arah 1. Sedangkan arah 3 merupakan arah tegak lurus terhadap arah serat. Hubungan tegangan-regangan berdasarkan arah serat seperti berikut.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix} \tag{16}$$



Gambar 2. Koordinat lamina.

Hubungan tegangan-regangan tersebut ditransformasikan untuk mendapatkan hubungan tegangan-regangan dalam koordinat laminat (x,y dan z). Sehingga persamaan (16) menjadi seperti berikut.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \tag{17}$$

Sehingga *constitutive matrix* untuk material komposit laminat dituliskan sebagai berikut.

$$\left( \int_{h_{k-1}}^{h_k} [D] dz \right) = \begin{bmatrix} N \\ M \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & E \end{bmatrix} = [d] \tag{18}$$

dimana **N**, **M**, dan **S** masing-masing merupakan gaya total, momen total dan gaya geser total. Sedangkan **A**, **B**, **D**, dan **E** didefinisikan seperti berikut.

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k - h_{k-1}) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \end{aligned} \tag{19}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^3 - h_{k-1}^3)$$

$$E_{ij} = \sum_{k=1}^n [(\bar{Q}_s)_{ij}]_k (h_k - h_{k-1})$$

Maka,  $[K]$  pada persamaan (15) menjadi seperti berikut.

$$[K] = \iint_A [C]^T [T]^T [d][T][C] \, dx \, dy \tag{20}$$

Sementara untuk matriks massa diturunkan dari persamaan energi kinetik.

$$T = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \bar{v}^2 \, dV = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \{\bar{v}\}^T \{\bar{v}\} \, dV \tag{21}$$

dimana vector kecepatan didefinisikan sebagai berikut.

$$\{\bar{v}\} = \left\{ \frac{\partial \bar{d}}{\partial t} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_0}{\partial t} + z \frac{\partial \theta_x}{\partial t} \\ \frac{\partial v_0}{\partial t} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial t} \\ \frac{\partial w_0}{\partial t} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_0}{\partial t} \\ \frac{\partial v_0}{\partial t} \\ \frac{\partial w_0}{\partial t} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial t} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial t} \end{array} \right\} = [Z][H]\{\dot{q}\} \tag{22}$$

Sehingga persamaan energi kinetik menjadi

$$T = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \{\dot{q}\}^T [H]^T [ZZ][H]\{\dot{q}\} \, dV = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [M]\{\dot{q}\} \, dV \tag{23}$$

Dengan nilai  $[ZZ] = [Z]^T [Z]$  dan  $[M]$  seperti berikut.

$$[M] = \iiint_V \rho [H]^T [ZZ][H] \, dV = \iint_A \rho [H]^T \left( \int_{-h/2}^{h/2} [ZZ] \, dz \right) [H] \, dx \, dy \tag{24}$$

dimana

$$\int_{-h/2}^{h/2} [ZZ] \, dz = I_0, I_1, I_2 = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \, dz = [ZZ]$$

sehingga matriks massa untuk material komposit laminat dituliskan seperti berikut.

$$[M] = \iint_A \rho [H]^T [zz][H] \, dx \, dy \tag{25}$$

**2.4. Integrasi Numerik**

Pengintegrasian dilakukan secara numerik dengan menggunakan metode kuadratur Gauss. Dalam pengintegrasian koordinat x dan y ditransformasikan menjadi koordinat  $\xi$  dan  $\eta$ .

$$I = \iiint_V F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \sum_{i=1}^{N_z} \int_{z_{i1}}^{z_{i2}} F[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), z] \cdot |J| \, dz \right) \, d\xi \, d\eta \tag{26}$$

$N_z$  merupakan jumlah zona integrasi dalam arah z, dan  $z_{i1}$  dan  $z_{i2}$  merupakan batas pengintegrasian. Maka pengintegrasian untuk *wing box* dengan material komposit laminat sebagai berikut.

Sehingga pengintegrasian untuk *skin* menjadi

$$\iiint_V F(x, y, z) \, dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \int_{z_L - \frac{1}{2}t_L}^{z_L + \frac{1}{2}t_L} F \cdot |J| \, dz + \int_{z_U - \frac{1}{2}t_U}^{z_U + \frac{1}{2}t_U} F \cdot |J| \, dz \right) \, d\xi \, d\eta \tag{27}$$

dan pengintegrasian untuk *spar web* menjadi seperti berikut.

$$\begin{aligned} \iiint_V F(x, y, z) dx dy dz &= \int_{\xi_s(\eta) - \frac{t_1}{c}}^{\xi_s(\eta) + \frac{t_1}{c}} \int_{-1}^1 \int_{z_L + \frac{1}{2}t_L}^{z_U - \frac{1}{2}t_U} F[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), z] \cdot |J| d\xi d\eta dz \\ &= \int_{-1}^1 d\eta \int_{-1}^1 (t_1/c) d\xi \int_{z_L + \frac{1}{2}t_L}^{z_U - \frac{1}{2}t_U} F\{x[(l_i/c)\xi + \xi_s(\eta), \eta], y[(l_1/c)\xi + \xi_s(\eta), \eta], z\} \cdot |J| dz \end{aligned} \tag{28}$$

Dimana  $c = \frac{1}{2}c_0(1 - \eta) + \frac{1}{2}c_1(1 + \eta)$ ,  $c_0$  merupakan panjang *chord* di *wing root*, dan  $c_1$  panjang *chord* di *wing tip*.

**2.5. Persamaan Lagrange untuk Getaran Bebas**

Persamaan gerak untuk getran bebas diturunkan dari persamaan Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \tag{29}$$

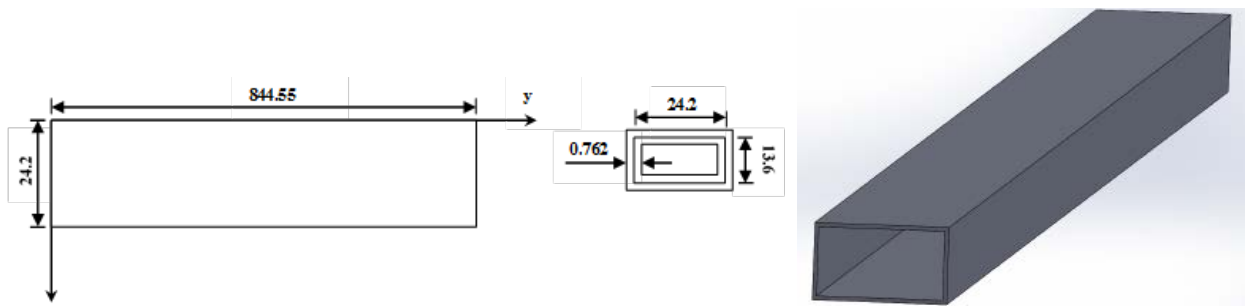
Dimana,  $L = T - V = T - U$ . Dengan memasukkan persamaan (14) dan (23) ke persamaan (29), maka didapatkan persamaan gerak seperti berikut.

$$[K_{total} - \lambda M_{total}]\{x\} = 0 \tag{30}$$

Dimana  $\lambda = \omega^2$ , maka diperoleh frekuensi pribadi dan modus getar dari struktur sayap pesawat.

**3. Hasil dan pembahasan**

*Equivalent plate model* dengan *first-order shear deformation theory* (FSDT) berdasarkan metode Reissner-Mindlin digunakan untuk menganalisa struktur sayap pesawat dengan material komposit yang dimodelkan dalam bentuk *wing-box*. Kondisi batas diberikan dengan mengasumsikan bahwa struktur merupakan struktur kantilever. Dimensi struktur seperti diperlihatkan pada Gambar 3. Material komposit laminat grafit/epoksi digunakan dengan sifat material tiap lamina:  $E_1 = 141.96$  GPa,  $E_2 = E_3 = 9.70$  GPa,  $\nu_{12} = \nu_{13} = 0.42$ ,  $\nu_{23} = 0.5$ ,  $G_{12} = G_{13} = 6.0$  GPa,  $G_{23} = 4.83$  GPa, dan  $\rho = 1445.0$  kg/m<sup>3</sup>. *Wing-box* terdiri dari enam lamina yang tersusun tidak simetris dan tiap lamina memiliki ketebalan yang sama. Tabel 1 memperlihatkan susunan lamina, baik untuk *circumferentially asymmetric stiffness* (CAS) maupun *circumferentially uniform stiffness* (CUS).



**Gambar 3.** Dimensi *wing box* komposit laminat.

Frekuensi pribadi pertama *wing box* untuk masing-masing susunan lamina yang berbeda seperti ditampilkan pada Tabel 2. Frekuensi pribadi ini dibandingkan dengan data pada literatur (Carrera, Pagani, Cabral, dkk), dimana data tersebut terdiri dari data hasil analisa dinamis dengan menggunakan Carrera Unified Formulation (CUF) dengan *Lagrange-expansion class* (LE) dengan menerapkan *nine-point cross-sectional cubic polynomial* (24 L9), CUF *Taylor-expansion class* (TE) dengan TBM dan dengan menggunakan *seventh-order Taylor-like polynomials*. Selain itu data tersebut juga terdiri dari data hasil eksperimen, analitik, dan hasil analisa dengan menggunakan FEM, dimana data tersebut dipakioleh Carrera, Pagani, Cabral, dkk untuk validasi hasil analisa yang mereka lakukan [7].

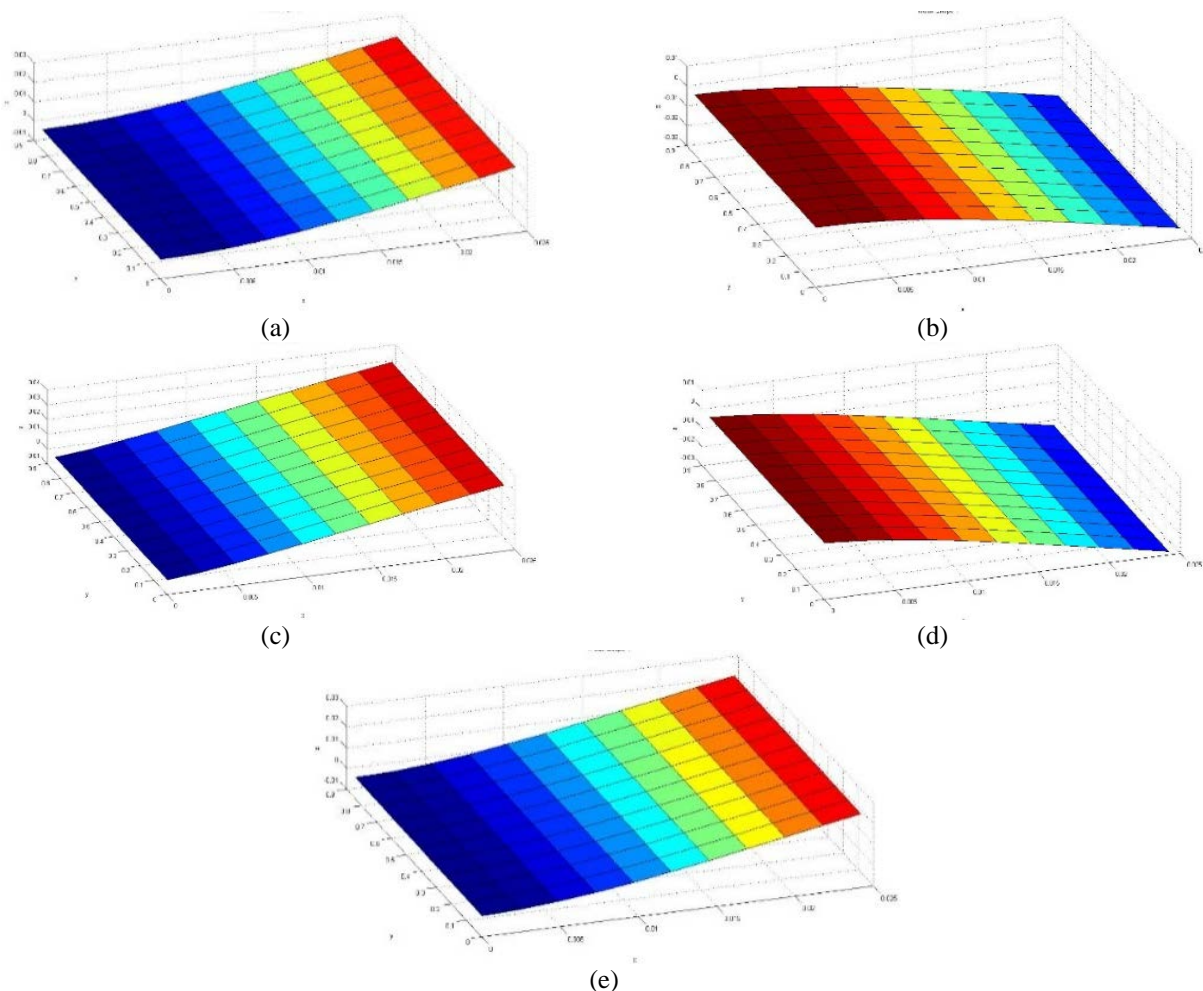
Pada Tabel 2 terlihat bahwa rata-rata perbedaan frekuensi pribadi yang diperoleh dengan data pada literatur sebesar 5.88 %, 4.27%, 6.77%, 14.13%, 6.95%, 7.39% masing-masing merupakan rata-rata perbedaan dengan data CUF *Lagrange-expansion class* (LE), TBM, *seventh-order Taylor-like polynomials*, eksperimen, analitik, dan hasil analisa dengan menggunakan FEM. Dan modus getar *wing-box* baik untuk CAS2, CAS3, CUS1, CUS2, maupun CUS3 merupakan modus *bending* pertama, seperti terlihat pada Gambar 4.

**Tabel 1.** Susunan arah serat lapisan-lapisan laminat.

Wing box	Skin		Webs	
	Atas	Bawah	Kiri	Kanan
CAS2	[30] <sub>6</sub>	[30] <sub>6</sub>	[30/-30] <sub>3</sub>	[30/-30] <sub>3</sub>
CAS3	[45] <sub>6</sub>	[45] <sub>6</sub>	[45/-45] <sub>3</sub>	[45/-45] <sub>3</sub>
CUS1	[15] <sub>6</sub>	[-15] <sub>6</sub>	[15] <sub>6</sub>	[-15] <sub>6</sub>
CUS2	[0/30] <sub>3</sub>	[0/-30] <sub>3</sub>	[0/30] <sub>3</sub>	[0/-30] <sub>3</sub>
CUS3	[0/45] <sub>3</sub>	[0/-45] <sub>3</sub>	[0/45] <sub>3</sub>	[0/-45] <sub>3</sub>

**Tabel 2.** Frekuensi pribadi *wing-box*.

Case	EPM (Reni) (Hz)	CUF LE [7]		CUF TE [7]				Exp. [7] (Hz)	ε (%)	Analitik [7] (Hz)	ε (%)	FEM [7] (Hz)	ε (%)
		24 L9 (Hz)	ε (%)	TBM (Hz)	ε (%)	N=7 (Hz)	ε (%)						
CAS 2	19.32	20.06	3.67	20.96	7.81	20.60	6.20	20.96	7.81	19.92	3.00	19.73	2.06
CAS 3	14.92	14.74	1.19	15.00	0.56	14.69	1.54	16.67	10.52	14.69	1.54	14.58	2.30
CUS 1	33.96	29.51	15.08	32.36	4.94	29.19	16.34	28.66	18.49	28.67	18.45	28.37	19.70
CUS 2	36.62	34.69	5.58	35.09	4.37	34.61	5.82	30.66	19.45	34.23	7.00	34.29	6.81
CUS 3	34.31	33.03	3.89	33.11	3.64	33.01	3.95	30.00	14.38	32.75	4.78	32.35	6.07
Rata-rata			5.88		4.27		6.77		14.13		6.95		7.39



**Gambar 4.** Modus getar *wing-box*, (a) Modus getar 1 CAS2, f = 19.32 Hz, (b) Modus getar 1 CAS3, f = 14.92 Hz, (c) Modus getar 1 CUS1, f = 33.96 Hz, (d) Modus getar 1 CUS2, f = 36.62 Hz dan (e) Modus getar 1 CUS3, f = 34.31 Hz



#### 4. Kesimpulan

*Equivalent Plate Model* dilakukan pada penelitian ini untuk mendapatkan frekuensi pribadi dan modus getar dari struktur *wing-box* dengan material komposit laminat. Frekuensi yang didapat dari analisa menggunakan metode ini dibandingkan dengan frekuensi pribadi yang diambil dari literatur [7]. Hasil validasi menunjukkan kecocokan antara hasil analisa dengan data pada literatur tersebut, dengan rata-rata perbedaan dengan data pada literatur sebesar 5.88 %, 4.27%, 6.77%, 14.13%, 6.95%, 7.39% masing-masing merupakan rata-rata perbedaan dengan data CUF *Lagrange-expansion class* (LE) , TBM, *seventh-order Taylor-like polynomials*, eksperimen, analitik, dan hasil analisa menggunakan FEM.

#### Daftar Pustaka

- [1] Gibson, Ronald F. 1994. *Principles of Composite Material Mechanics*. USA: McGraw-Hill, Inc.
- [2] Rojas, Cesar Augusto. 2006. *Structural Analysis of Fiber Reinforced Composite Material*. Master. diss., *The Faculty of The Graduate School of The University of Texas at Arlington*.
- [3] Na, Yhoungh-Ho. dan Shin, Sang Joon. 2013. *Equivalent-Plate Analysis for a Composite Wing with a Control Surface*. *Journal of Aircraft* 50 (3): 853-862.
- [4] Kant, T. dan Swaminathan, K. 2001. *Analytical Solutions for Free Vibration of Laminated Composite and Sandwich Plates Based on a Higher-order Refined Theory*. *Composite Structures* 53: 73-85.
- [5] Liu, Youhua. 2000. *Efficient Methods for Structural Analysis of Built-up Wings*. Ph.D. diss., *The Faculty of Virginia Polytechnic Institute and State University*.
- [6] Vo, Thuc. dan Lee, Jaehong. 2008. *Free Vibration of Thin-walled Composite Box Beams*, *Composite Structures* 84 (1): 11-20. ISSN 0263-8223.
- [7] Carrera, E., Pagani, A., Cabral, P.H., Silva, G., dan Prado, A. 2015. *Enhanced Free Vibration Analysis of Composite Wing-box Structures by One-dimensional Component-wise and Dynamic Stiffness Formulations*. *International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics*.