Studi Aplikasi Metode *Operator Splitting* untuk Menyelesaikan *Anisotropic Problem*

Is Bunyamin Suryo[a, *], Maureen Clerc[b]
[a]Departemen Teknik Mesin, Fakultas Teknologi Industri, ITS
ITS Kampus Keputih Sukolilo Surabaya 60111
[b]Athena Project Team - INRIA
INRIA Sophia Antipolis, Prancis
*E-mail: isbunyamin@gmail.com

Abstract

Electroencephalography (EEG) is a non-invasive technique for studying electrical activity in the electrical brain. The electrical activity is a complex process of electrical propigation due to the complex structure of the brain. This complex brain structure causes parts of the brain to have different conductivity, both in size and orientation, which is called anisotropic conductivity. Using Maxwell's Equation approach, electrical activity in the brain has been intensively studied. For simplicity, the quasistatic Maxwell Equation (Poisson's Equation) is used to model electrical activity in the brain. In this study, an initial study was conducted using a new method, Operator Splitting Method (OSM), to solve anisotropic (2D) 2-Dimensional Poisson Equation. A freeware of the finite element method (FEM) is used to construct the matrix used in the OSM algorithm. The OSM algorithm is then tested to solve anisotropic Laplace 2D Equation and anisotropic Poisson Equation with a dipolar source. After that, the OSM solution is validated using theoretical solutions and direct numerical solutions. Using L2-Error Norm, the convergence rate of the OSM algorithm is then analyzed. Several numerical experiments have been carried out to test the OSM algorithm. The OSM solution of the anisotropic Laplace 2D Equation corresponds to a theoretical solution and a direct numerical solution. For 2D anisotropic Poisson Equations with dipolar sources, several similar results have been obtained. The OSM solution pattern is very close to the numerical solution pattern directly. The results of this numerical experiment raise hopes to try to apply the OSM algorithm to more complex problems such as real modeling on the human head.

Keywords: Maxwell's Equation, FEM, Laplace's Equation, Poisson's Equation

Abstrak

Electroencephalography (EEG) adalah teknik non-invasif untuk mempelajari aktivitas listrik pada otak listrik. Aktivitas listrik tersebut adalah proses propigasi listrik yang komplek karena struktur otak yang rumit. Struktur otak yang komplek ini menyebabkan bagian-bagian otak memiliki konduktivitas yang berbeda, baik besarnya maupun orientasinya, yang disebut konduktivitas anisotropik. Menggunakan pendekatan Persamaan Maxwell, aktivitas listrik pada otak telah dipelajari secara intensif. Untuk penyederhanaan, Persamaan Maxwell quasistatik (Persamaan Poisson) digunakan untuk memodelkan aktivitas listrik pada otak. Dalam penelitian ini, dilakukan studi awal penggunaan metode baru, *Operator Splitting Method* (OSM), untuk menyelesaikan Persamaan Poisson 2-Dimensi anisotropik (2D). Sebuah *freeware* dari metode elemen hingga (FEM) digunakan untuk membangun matriks yang digunakan dalam algoritma OSM. Algoritma OSM kemudian diuji untuk menyelesaikan Persamaan 2D Laplace anisotropik dan Persamaan Poisson anisotropik dengan sumber dipolar. Setelah itu, solusi OSM divalidasi dengan menggunakan solusi teoritis dan solusi numerik langsung. Dengan menggunakan *L2-Error Norm*, laju konvergensi dari algoritma OSM kemudian dianalisis. Beberapa percobaan numerik telah dilakukan untuk menguji algoritma OSM. Solusi OSM dari Persamaan 2D Laplace anisotropik bersesuaian dengan solusi teoritis dan solusi numerik langsung. Untuk Persamaan 2D Poisson anisotropik dengan sumber dipolar, beberapa hasil serupa juga telah diperoleh. Pola solusi OSM sangat mendekati pola solusi numerik langsung. Hasil percobaan numerik ini memunculkan harapan untuk mencoba menerapkan algoritma OSM untuk masalah yang lebih kompleks seperti pemodelan riil pada kepala manusia.

Kata kunci: Persamaan Maxwell, FEM, Persamaan Laplace, Persamaan Poisson

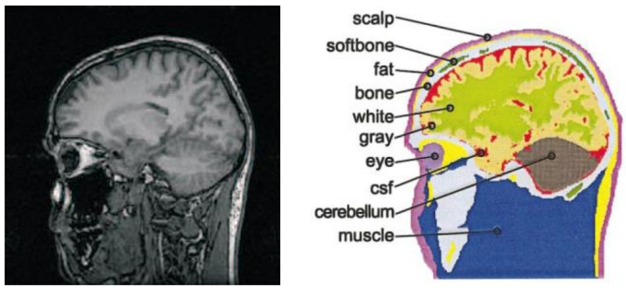
1. Pendahuluan

Electroencephalography (EEG) adalah teknik non-invasif untuk mempelajari aktivitas listrik pada otak listrik. Aktivitas listrik tersebut adalah proses propigasi listrik yang komplek karena struktur otak yang rumit. Struktur otak yang komplek ini menyebabkan bagian-bagian otak memiliki konduktivitas yang berbeda, baik besarnya maupun orientasinya, yang disebut konduktivitas anisotropik. Menggunakan pendekatan Persamaan Maxwell, aktivitas listrik pada otak telah dipelajari secara intensif. Untuk penyederhanaan, Persamaan Maxwell quasistatik (Persamaan Poisson) digunakan untuk memodelkan aktivitas listrik pada otak, seperti ditunjukkan oleh Persamaan 1. Perdekatan ini sangat valid untuk pemodelan EEG karena frekuensi EEG pada kepala manusia sangat lemah, lebih rendah dari 10^2 Hz [1].

$$\nabla \cdot \left(\sigma \nabla V \right) = \nabla \cdot J^{p} \tag{1}$$

dimana V adalah potensial listrik, J^p adalah arus utama, dan σ adalah sifat konduktivitas. Dalam pemodelan EEG pada kepala manusia, sifat konduktivitas Persamaan 1 harus ditentukan. Properti ini terkait dengan struktur kepala manusia. Struktur kepala manusia adalah struktur yang sangat kompleks karena merupakan struktur heterogen dengan lapisan jaringan yang berbeda dan setiap lapisan jaringan memiliki sifat khusus seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 1 [2-3]. Untuk pemodelan kepala manusia yang realistis, sangat sulit untuk menyelesaikan model yang mempertimbangkan kompleksitas struktur kepala manusia [4-6]. Secara umum, model ini disebut model kepala manusia anisotropik. Ide dari penelitian ini adalah untuk mengusulkan metode baru, yang disebut Operator Splitting Method (OSM), untuk memecahkan masalah anisotropik. Metode yang diusulkan diharapkan dapat menyelesaikan masalah anisotropik dengan mudah. Dalam penelitian ini, studi kelayakan menggunakan OSM untuk memecahkan masalah anisotropik sederhana akan disajikan. Harapannya adalah studi kelayakan ini dapat memotivasi para peneliti untuk menerapkan OSM dalam model kepala manusia yang realistis.

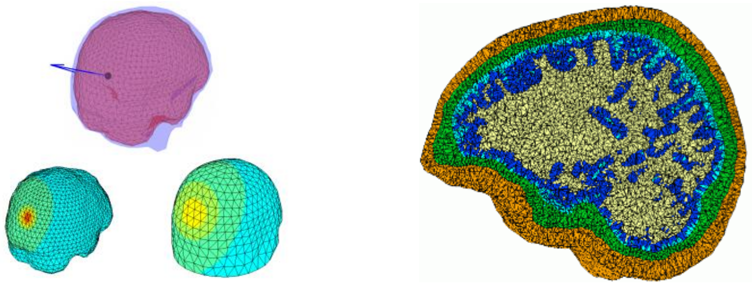
Banyak peneliti telah mencoba mengembangkan model kepala manusia untuk menyelesaikan *forward problem of EEG source localization*. *Forward problem of EEG source localization* bertujuan untuk menghitung medan listrik yang dihasilkan oleh arus primer pada dalam geometri/domain tertentu. Metode elemen batas (BEM) dan metode elemen hingga (FEM) dapat diimplementasikan untuk menyelesaikan *forward problem of EEG source localization*. Kedua metode pendekatan numerik ini memiliki kelebihan dan kekurangan. Simulasi dengan pendekatan BEM memerlukan biaya komputasi yang relative rendah karena dekomposisi domain atau meshing hanya diterapkan pada batas domain, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2a.



(a) (b)

Gambar 1. (a) *The MRI of the human head* (b) *The human head tissues* [7]**.**

Kelemahan dari pendekatan BEM adalah pada asumsi yang digunakan sehingga menjadi tidak realistis, yaitu semua lapisan jaringan otak dianggap homogen dan isotropik [8]. Sedangkan pendekatan dengan simulasi FEM membutuhkan biaya komputasi yang tinggi karena seluruh domain komputasi harus didekomposisi, seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 2b. Ini berarti bahwa jumlah node atau titik yang tidak diketahui pada domain jauh lebih banyak daripada menggunakan BEM. Namun, pendekatan FEM jauh lebih realistis daripada pendekatan BEM karena kompleksitas lapisan jaringan otak yang heterogen dan anisotropik dapat diakomodasi. Dalam penelitian ini, menggunakan OSM, masalah anisotropik sederhana dicoba untuk dipecahkan dengan mempertimbangkan model isotropiknya dan memperkenalkan faktor koreksi, yang disebut lineic.



(a) (b)

Gambar 2. (a) *Human head model through triangle BE* (b) *Human head model through tetrahedral FE***.**

2. Metode Penelitian

Pertama, OSM akan digunakan untuk menyelesaikan Persamaan 2D Laplace anisotropik. Solusi OSM kemudian dibandingkan dengan solusi numerik langsung dan solusi analitis untuk memvalidasi solusi OSM. Setelah itu, OSM akan diuji untuk mendapatkan solusi Persamaan 2D Poisson anisotropik. Berdasarkan Persamaan Poisson (Persamaan 1), bila sisi kanan Persamaan 1 sama dengan nol, maka Persamaan 1 merupakan Persamaan Laplace, seperti yang dinyatakan oleh Persamaan 2. Pada domain 2D, operator konduktifitas (*delta*) pada Persamaan 1 dan 2 dapat dinyatakan sebagai Persamaan 3.

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla V) = 0 \tag{2}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{pmatrix} \tag{3}$$

dimana σ_x adalah konduktifitas arah-x, σ_y adalah konduktifitas arah-y. Bila $\sigma_x = \sigma_y$, maka σ adalah konduktifitas isotropik, σ_{iso}. Bila $\sigma_x \succ \sigma_y \succ 0$ atau $0 \prec \sigma_x \prec \sigma_y$, maka σ adalah konduktifitas anisotropik, σ_{anis}. Sehingga, 2D Poisson's and Laplace's equation dapat dinyatakan secara berturut-turut seperti Persamaan 4 dan 5.

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla V) = \sigma_x \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \nabla \cdot J^p \tag{4}$$

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla V) = \sigma_x \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \tag{5}$$

Untuk mengimplementasikan OSM, operator konduktifitas pada *anisotropic 2D Poisson's* - *Laplace's equation* dianggap sebagai penjumlahan dari *isotropic conductivity*, σ_{iso}, dan *lineic/correction conductivity*, σ_{lin}, seperti berikut:

$$\sigma_{aniso} = \sigma_{iso} + \sigma_{lin} \tag{6}$$

Bila diasumsikan $\sigma_x \succ \sigma_y$, Persamaan 6 dapat ditulis sebagai berikut:

$$\sigma_{anis} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{pmatrix} = \sigma_{iso} + \sigma_{lin} = \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{x-lin} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Bila Persamaan 6 disubtitusikan ke Persamaan 1 dan 2, dengan asumsi $\sigma_y = 1$, Persamaan 1 dan 2 dapat disusun ulang secara berturut-turut sebagai Persamaan 8 dan 9. Nilai dari σ_{x-lin} tergantung pada seberapa kuat σ_x terhadap σ_y (rasio antara konduktifitas ke arah-x dan arah-y).

$$\sigma_x \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + \sigma_{x-lin} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \nabla \cdot J^p \tag{8}$$

$$\sigma_x \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + \sigma_{x-lin} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \tag{9}$$

Menyelesaikan Persamaan Poisson dengan pendekatan FEM akan menghasilkan sebuah sistem linier $AV = B$. Pada dasarnya, sistem linier $AV = B$ dibangun berdasarkan proses sebagai berikut: matrik A dibangun dari *left hand-side of the equation*, sedangkan matrik B dibangun dari *right hand-side of the equation*. Penggunaan OSM, ada 2 term di *left hand-side of the equation*. Matrik pertama A dibangun dari $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)$, disebut sebagai A_{iso}. Matrik kedua A dibangun dari $\sigma_{x-lin} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, disebut sebagai A_{lin}. Dengan *freeware* FreeFEM++ [9], kedua term tersebut didiskritisasi sehingga dihasilkan elemen matrik A. Setelah itu, algoritma OSM akan dikembangkan berdasarkan matrik A yang dihasilkan sebelumnya. Pada penelitian ini, algoritma OSM yang ditawarkan adalah sebagai berikut:

$$A_{iso}.V_n = B - A_{lin}.V_{(n-1)} \tag{10}$$

$$V_{(n+1)} = \lambda.V_n + (1-\lambda).V_{(n-1)} \tag{11}$$

dimana λ adalah koefisien relaksasi dan n adalah jumlah iterasi. Koefisien relaksasi ini digunakan untuk mempercepat konvergensi saat proses iterasi. Algoritma OSM yang ditulis dengan Matlab kemudian diuji untuk menyelesaikan *anisotropic Laplace's - Poisson's equation with dipolar source*. Dengan menggunakan *L2-Error Norm*, laju konvergensi algoritma OSM akan dianalisa.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Solusi Numerik dari Persamaan 2D Laplace Anisotropik

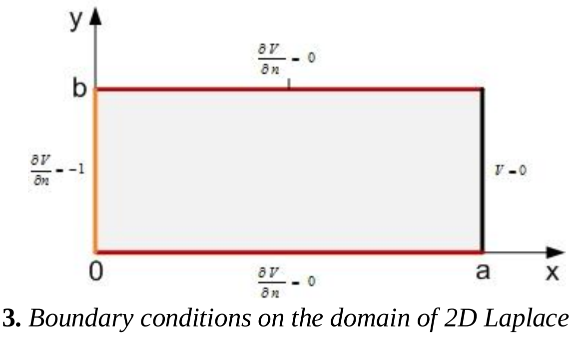
Sebelum menyelesaikan Persamaan 2D Poisson anisotropik, OSM akan diuji terlebih dulu untuk menyelesaikan Persamaan 2D Laplace anisotropik (Persamaan 12) dimana $\sigma_x = 3\sigma_y$.

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla V) = \sigma_x \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \tag{12}$$

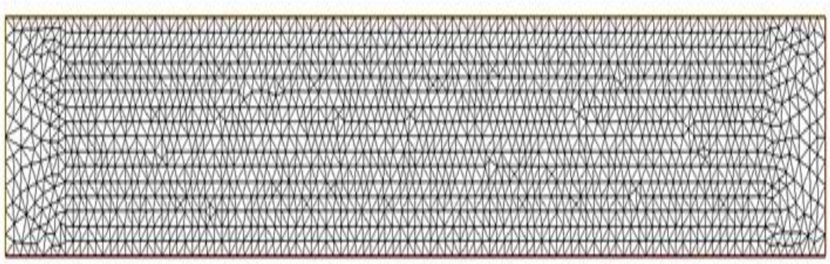
Domain dari simulasi ini adalah sebuah persegi panjang pada koordinat-xy seperti ditunjukan oleh Gambar 3. Batas kondisi untuk menyelesaikan Persamaan 12 adalah sebagai berikut:

$$V(a, y) = 0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial V}{\partial n}(x,0) = 0,\ \frac{\partial V}{\partial n}(x,b) = 0,\ \frac{\partial V}{\partial n}(0,y) = -1 \tag{14}$$

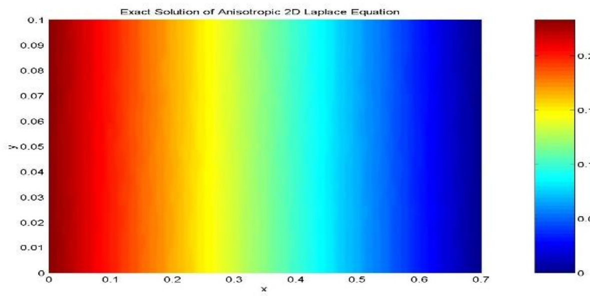


Gambar 3. *Boundary conditions on the domain of 2D Laplace's equation*.

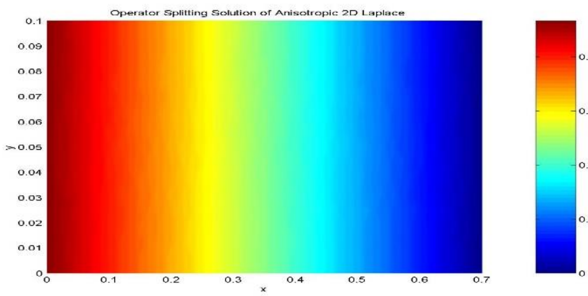


Gambar 4. *Domain decomposition/meshing.*

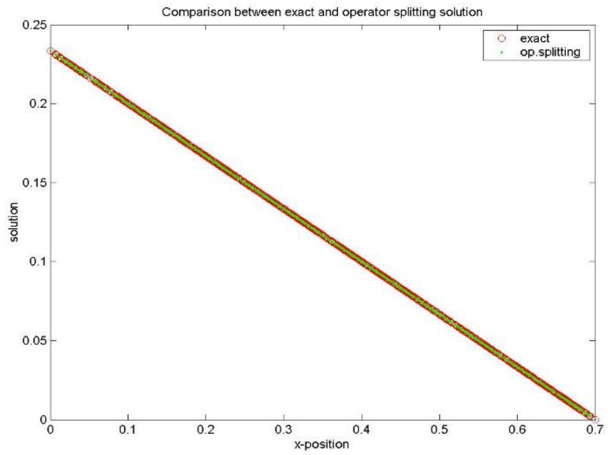
Pada batas domain, ada dua jenis kondisi batas yang digunakan, yaitu batas kondisi Dirichlet dan batas kondisi Neumann. Sebuah *freeware*, FreeFEM ++, digunakan untuk mendiskritisasi domain simulasi dan membangun matrik dari sistem linier $AV = B$. Kemudian algoritma OSM yang ditulis dengan Matlab akan digunakan untuk menyelesaikan sistem linear ini dan menampilkan solusi numerik. Dimensi domain persegi panjang 2D adalah (0,1x0,7), didekomposisi menggunakan meshing segitiga menjadi 1852 node atau simpul dan 3462 segitiga seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 4. Solusi analitis atau teoritis dan solusi dari OSM dari Persamaan 12 ditunjukkan oleh Gambar 5 dan 6 secara berturut-turut. Hasil analitis diperoleh dengan menggunakan metode Pemisahan Variabel, sedangkan solusi dari OSM diperoleh dengan menggunakan koefisien relaksasi (Persamaan 11) 0,1 dengan 30 iterasi. Gambar 7 menunjukkan perbandingan antara solusi analitis dengan OSM. Dari Gambar 5, 6, dan 7 dapat dilihat bahwa solusi yang dihasilkan OSM memiliki kesamaan (*good agreement*) dengan hasil analitis. Laju konvergensi algoritma OSM dapat dilihat pada Gambar 8. Secara umum, algoritma yang diusulkan bekerja dengan baik karena tren konvergensi menurun sepanjang iterasi. Dalam penelitiannya, Suryo [10] menjelaskan pengaruh dari nilai koefisien relaksasi pada kecepatan konvergensi dari simulasi OSM. Suryo [10] menvariasikan nilai koefisien relaksasi dari 0,03 hingga 0,6. Dengan nilai koefisien relaksasi yang semakin besar maka konvergensi semakin cepat dicapai. Dari hasil ini, OSM bisa diuji untuk menyelesaikan persamaan yang lebih komplek, yaitu Persamaan 2D Poisson anisotropik dengan sumber dipolar.



Gambar 5. *Analytical solution of anisotropic 2D Laplace's equation for* $\sigma_x = 3\sigma_y$.



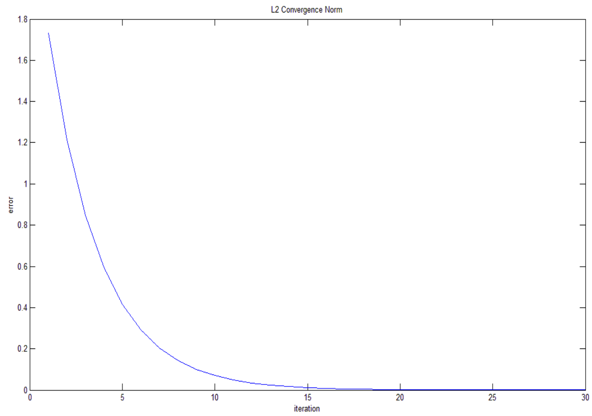
Gambar 6. *OSM solution of anisotropic 2D Laplace's equation for* $\sigma_x = 3\sigma_y$.



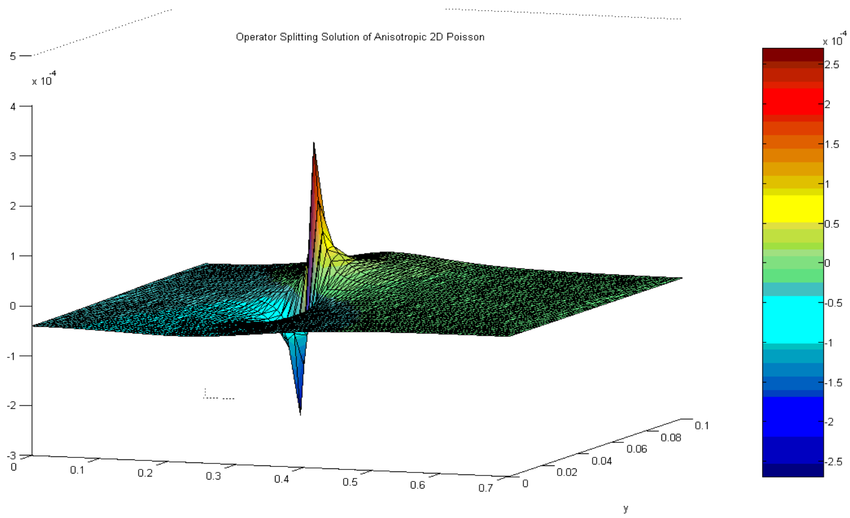
Gambar 7. *Comparison between exact and OSM solution in solving anisotropic 2D Laplace's equation.*

3.2 Solusi Numerik dari Persamaan 2D Poisson Anisotropik

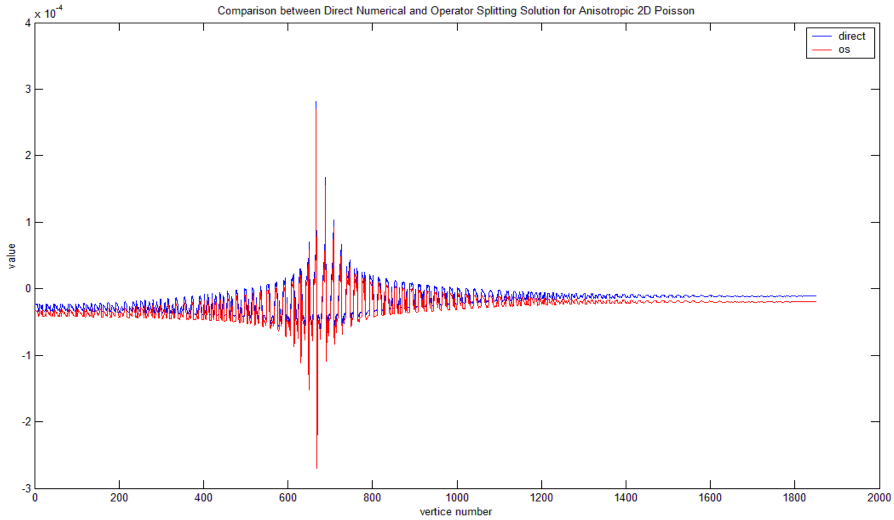
Pada bagian ini, Persamaan 2D Poisson anisotropik dengan sumber dipolar akan diselesaikan dengan menggunakan OSM. Untuk percobaan, Persamaan 2D Poisson anisotropik dengan sumber dipolar ditentukan di mana $\sigma_x = 8\sigma_y$. Solusi ini diperoleh dengan koefisien relaksasi = 0,1 dengan 30 iterasi. Gambar 9 menunjukan grafis hasil simulasi dengan OSM, sedangkan Gambar10 menunjukkan perbandingan antara solusi dengan OSM dan solusi numerik langsung. Dari Gambar 10 dapat disimpulkan bahwa perbandingan antara solusi OSM dengan solusi numerik langsung kesamaan yang cukup baik (*good agreement*).



Gambar 8. *Convergence rate of OSM in solving anisotropic 2D Laplace's equation for* $\lambda = 0.1$, *n = 30.*



Gambar 9. *Operator Splitting solution of anisotropic 2D Poisson's equation.*



Gambar 10. *Comparison between direct numerical and OSM solution in solving anisotropic 2D Poisson's equation.*

4. Kesimpulan

Eksperimen numerik yang telah dilakukan pada penelitian ini menunjukkan bahwa OSM yang diajukan mampu menyelesaikan dengan baik Persamaan 2D Laplace anisotropik maupun Poisson anisotropik dengan sumber dipolar. Hasil simulasi OSM memiliki kesamaan yang cukup baik (good agreement) dengan solusi analitis/teoritis maupun dengan hasil solusi numerik langsung. Kinerja algoritma OSM yang diusulkan bekerja dengan baik dalam menyelesaikan Persamaan 2D Laplace anisotropik atau Persamaan 2D Poisson anisotropik dengan sumber dipolar. Metode ini masih perlu banyak pengujian, misalnya dengan menvariasikan besarnya koefisien relaksasi, rasio konduktifitas ke arah-x dank e arah-y. Dari penelitian atau studi awal ini, ada harapan atau motivasi untuk menerapkan algoritma OSM untuk masalah yang lebih kompleks seperti model kepala manusia yang realistis. Menerapkan algoritma OSM dalam domain yang sedemikian kompleks, tugas yang paling sulit adalah membangun matriks yang akan diterapkan pada algoritma yang diusulkan. Dengan demikian di masa yang akan dating, hal ini akan menjadi topik penelitian yang sangat menarik bagi para peneliti. Semoga, metode baru ini (OSM) akan mampu membantu dalam memecahkan masalah pemodelan EEG yang realistis sesuai dengan struktur anatomi otak manusia.

Daftar Pustaka

[1] Clerc, M and Papadopoulo, T., 2010, "*Inverse problems in functional brain imaging*", Reference material for the MVA Master 2 class".

[2] Geddes, L., Baker, L., 1967, "The specific resistance of biological material. A compendium of data for the biomedical engineer and physiologist", *Medical and biological engineering* 5, 271– 293.

[3] Haueisen, J., 1996, "*Methods of numerical field calculation for neuromagnetic source localization*", PhD thesis, Shaker-Verlag Aachen, ISBN 3-8265-1691-5.

[4] Rush, S., Driscoll, D., 1968, "Current distribution in the brain from surface electrodes", *Anesthesia & Analgesia* 47 (6), 717– 723.

[5] Akhtari, M., Bryant, H., Marmelak, A., Flynn, E., Heller, L., Shih, J., Mandelkern, M., Matlachov, A., Ranken, D., Best, E., DiMauro, M., Lee, R., Sutherling, W., 2002, "Conductivities of three-layer live human skull", *Brain Topography* 14 (3), 151– 167.

[6] Nicholson, P., 1965, "Specific impedance of cerebral white matter", *Experimental Neurology* 13, 386-401.

[7] Haueisen, J., Tuch D.S., Ramon, C., Schimpf, P., Wedeen, V.J., George, J.S. and Belliveau, J.W., 2002, "The influence of brain anisotropy on human EEG and MEG", *NeuroImage*, 15: 159-166.

[8] Awada, Kassem A., et.al., 1997, "Computational Aspects of Finite Element Modeling in EEG Source Localization", *IEEE Transaction on Biomedical Engineering*, Vol. 44, No. 8.

[9] http://www3.freefem.org/

[10] Suryo, Is Bunyamin, 2010, "*Operator Splitting for Solving Anisotropic Problem: a Feasibility Study*", Master thesis, EPU Nice-Sophia Antipolis, Prancis.