

## ANALISA KINEMATIKA DAN DEKOMPOSISI SISTEM GAYA PADA CDDR

Toni Prahasto

Jurusan Teknik Mesin, Fakultas Teknik, Universitas Diponegoro

E-mail: [toni\\_prahasto@yahoo.com](mailto:toni_prahasto@yahoo.com)

### ABSTRACT

*This article presents an elementary description about the characteristics of cable-direct-drive robot, in particular about the kinematic constraints and kinetics redundancy in cable driving system. The robot that is observed in this article is one with three-cable driver; as a consequence, this robot will have one redundancy. Robot's motion lies on a plane, that is the planar curvilinear motion. Robot's motion is assumed to be purely translational, and no rotation occurs. The redundancy is represented by a linear combination of the range space and the multiple of null space of the coefficient matrix of the force system at the end-effector. An example for a given position and a planar two-dimensional force system is presented. The results indicate that the use of range space and null space together will produce stable and consistent results.*

**Keywords:** Robot, Kinematik, CDDR

### PENDAHULUAN

Merujuk pada makalah tulisan William[5,6], cable-direct-driven robots (untuk selanjutnya disingkat CDDR) adalah sebuah manipulator paralel dimana aktuator end-effector dilakukan oleh  $n$  buah kabel dengan  $n$  buah motor; aktuasi dilakukan sedemikian rupa agar setiap tali selalu dalam kondisi tegang (in tension). CDDR memiliki beberapa keunggulan, yaitu: keunggulan robot paralel, ditambah dengan ringan & kaku.

Beberapa CDDR yang telah dibangun pada masa yang lalu adalah: Robocrane buatan NIST untuk digunakan di pelabuhan kapal kargo, Charllote buatan McDonnell-Douglas untuk digunakan di International Space Station, Texas 9-string, SPIDAR, 7-cable master, 8-cable haptic interface. CDDR umumnya dapat dibuat lebih ringan, kaku, aman, dan ekonomis, dari robot serial yang sudah umum dikenal.

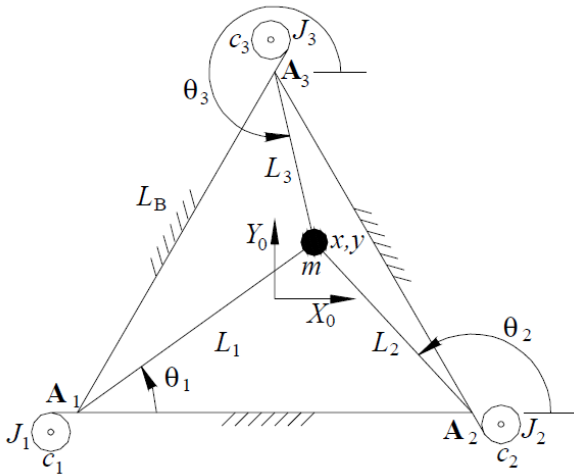
Kelemahan CDDR adalah keterbatasan arah gaya aktuasi, yaitu hanya arah tarik. Secara alamiah, tali tidak mampu menahan beban tekan. Untuk menjamin kondisi tarik (tensioned) pada tali, sistem aktuasi CDDR dirancang dengan menggunakan redundancy, yaitu jumlah variabel aktuasi lebih sedikit dari jumlah persamaan geraknya. Redundancy akan membuat solusi persamaan gerak yang jamak, yaitu tidak tunggal. Redundancy digunakan untuk memastikan bahwa semua kabel is in tension. Persoalan ini secara matematik jatuh pada jenis persoalan optimisasi, dan prosedur perhitungan untuk mendapatkan nilai variabel dilakukan secara bertahap.

Perhitungan variabel dalam redundant system ini menggunakan Moore-Penrose pseudoinverse, dan pseudoinverse dihitung dengan menggunakan Singular Value Decomposition (SVD). Ruang lingkup artikel ini

adalah robot dengan redundancy tunggal (single redundancy). Gerakan end-effector yang dibahas hanya gerakan translasi, sehingga analisa kinematika dan kinetika akan menggunakan model kinematika dan kinetika partikel.

### Cable Direct Driven robot (CDDR)

Bahasan di bawah ini merupakan adaptasi dari artikel yang ditulis oleh William[5,6]. Notasi yang digunakan sengaja disamakan dengan notasi dalam artikel William dengan tujuan memudahkan pembaca untuk melacak dan membandingkan model dan logika analisa kinematika dan statika. Gambar di bawah ini memperlihatkan pandangan atas (plan view) dari sebuah CDDR dengan sistem aktuator yang terdiri dari tiga buah kabel. CDDR ini merupakan sebuah CDDR dengan satu redundancy. End-effector dimodelkan dengan partikel dengan posisi seperti terlihat pada gambar yaitu  $\mathbf{x} = \{x, y\}^T$ ; Sistem koordinat yang digunakan adalah sistem koordinat  $X_0, Y_0$  seperti terlihat pada gambar. Sistem aktuator terdiri dari tiga buah tali yang masing-masing digerakkan oleh puli yang posisinya digambarkan sebagai  $A_1, A_2$ , dan  $A_3$ , dimana  $A_i = \{A_{ix}, A_{iy}\}^T$ . Sudut yang dibentuk oleh masing-masing tali diukur dari sumbu horizontal positif adalah  $\theta_1, \theta_2$ , dan  $\theta_3$ . Panjang tali untuk posisi  $\mathbf{x} = \{x, y\}^T$  masing-masing adalah  $L_1, L_2$ , dan  $L_3$ . Jarak antar titik  $A_i - A_j$ , dibuat seragam, yaitu  $L_B$ .



Gambar 1. CDDR dengan gerakan translasi dua dimensi; disalin dari makalah tulisan William[5]

**KINEMATIKA CDDR**

**Kinematika Posisi**

Untuk sebuah posisi end-effector  $\mathbf{x} = \{x, y\}^T$ , panjang tali dapat dituliskan dalam persamaan di bawah ini:

$$L_1 = \sqrt{(x - A_{1x})^2 + (y - A_{1y})^2}$$

$$L_2 = \sqrt{(x - A_{2x})^2 + (y - A_{2y})^2}$$

$$L_3 = \sqrt{(x - A_{3x})^2 + (y - A_{3y})^2}$$

Kemudian kita dapat mengetahui arah dan kemiringan tali yaitu

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left( \frac{y - A_{1y}}{x - A_{1x}} \right)$$

$$\theta_2 = \tan^{-1} \left( \frac{y - A_{2y}}{x - A_{2x}} \right)$$

$$\theta_3 = \tan^{-1} \left( \frac{y - A_{3y}}{x - A_{3x}} \right)$$

Kuadran dimana sudut terletak ditentukan berdasarkan tanda pembilang dan penyebut. Apabila pembilang positif, maka sudut terletak pada kuadran 1 atau 2, dan sebaliknya, pembilang negatif menandakan bahwa sudut terletak pada kuadran 3 atau 4. Untuk penyebut, harga positif mengindikasikan sudut terletak pada kuadran 1 atau 4, dan harga negatif menunjukkan sudut terletak pada kuadran 2 atau 3. Tabel di bawah ini menunjukkan ringkasan dari penentuan kuadran sudut.

		$x - A_{i,x}$	
		$> 0$	$< 0$
$y - A_{i,y}$	$> 0$	Kuad.1	Kuad.3
	$< 0$	Kuad.4	Kuad.2

Analisa untuk harga  $L$  dan  $A$  di atas dikenal dengan nama analisa inverse kinematics. Pembahasan yang rinci mengenai konsep inverse kinematics dapat dilihat pada buku mengenai robot, misalnya buku karangan Spong[4].

**Kinematika kecepatan**

Setelah panjang tali untuk sebuah posisi end-effector  $\mathbf{x} = \{x, y\}^T$  dihitung, langkah selanjutnya adalah analisa kecepatan memanjang atau memendeknya tali. Kita memulainya dengan menetapkan bahwa kecepatan end effector pada posisi  $\mathbf{x} = \{x, y\}^T$  adalah  $\mathbf{v} = \{v_x, v_y\}^T$ .

Kita memulainya dengan melihat hubungan antara posisi  $A_1$ ,  $L_1$ ,  $\theta_1$ , dan  $x$  dan  $y$ . Kelima variabel tersebut memenuhi persamaan berikut ini, yaitu:  $x = A_{1x} + L_1 \cos \theta_1$  dan  $y = A_{1y} + L_1 \sin \theta_1$ . Kemudian, kita melakukan derivatif (turunan) untuk mendapatkan kecepatan, yaitu

$$v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dL}{dt} \cos \theta_1 + L_1 (-\sin \theta_1) \frac{d\theta_1}{dt}$$

$$= \cos \theta_1 \cdot \dot{L}_1 + (-L_1 \sin \theta_1) \omega_1$$

$$v_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dL}{dt} \sin \theta_1 + L_1 (\cos \theta_1) \frac{d\theta_1}{dt}$$

$$= \sin \theta_1 \cdot \dot{L}_1 + (L_1 \cos \theta_1) \omega_1$$

Persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{L}_1 \\ \omega_1 \end{Bmatrix}$$

Inverse dari persamaan di atas adalah

$$\begin{Bmatrix} \dot{L}_1 \\ \omega_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{L_1} \begin{bmatrix} L_1 \cos \theta_1 & L_1 \sin \theta_1 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix}$$

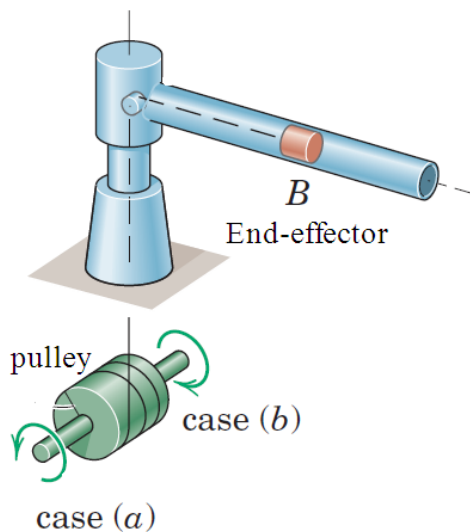
Kemudian, kita mengambil baris pertama saja, yaitu  $\dot{L}_1 = [\cos \theta_1 \quad \sin \theta_1] \{v_x \quad v_y\}^T$ . Persamaan ini mengekspresikan laju pemanjangan atau pemendekan tali  $L_1$ , apabila end effektor berada pada posisi  $\mathbf{x} = \{x, y\}^T$  dan bergerak dengan kecepatan  $\mathbf{v} = \{v_x, v_y\}^T$ . Dengan cara yang sama, kita dapat mengekspresikan laju pemanjangan dan pemendekan semua tali, yaitu

$$\begin{Bmatrix} \dot{L}_1 \\ \dot{L}_2 \\ \dot{L}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \\ \cos \theta_3 & \sin \theta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix} \quad \text{atau disingkat}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{L}_1 \\ \dot{L}_2 \\ \dot{L}_3 \end{Bmatrix} = [\mathbf{M}] \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix}$$

Matriks adalah inverse dari matriks Jacobian CDDR.

Untuk memperpanjang atau memperpendek tali, digunakan mekanisma seperti terlihat di bawah ini



Gambar 2. Mekanisme tarik dan ulur; di-copy dari buku karangan Meriam[2]

Benda B merepresentasikan end-effector dan posisinya. Benda B dihubungkan dengan tali yang digulungkan pada pulley. Kasus (a) memperlihatkan arah putaran pulley untuk menarik kabel sehingga panjang  $L$  berkurang. Kasus (b) memperlihatkan arah putaran sebaliknya untuk mengulur kabel. Kasus inilah yang merupakan inti permasalahan pengendalian gerak dan gaya pada tali. Tali tidak bisa menerima beban tekan, dan ia akan sagging apabila motor mengulurnya lebih dari yang ditentukan. Gejala ini merupakan motivasi utama berbagai penelitian untuk CDDR.

## KINETIKA CDDR

### Sistem gaya pada end-effector

Hal lain yang harus dilakukan untuk mengendalikan CDDR adalah pengendalian gaya (force control) untuk gerakan tertentu. Kita meninjau sebuah CDDR yang end-effectornya berada pada posisi  $\mathbf{x} = \{x, y\}^T$  dan kemudian dikendalikan untuk mengalami akselerasi  $\mathbf{a} = \{a_x, a_y\}^T$  i akselerasi. Maka gaya yang harus diberikan pada end-effector adalah  $\mathbf{F} = m\{a_x, a_y\}^T$ . Dalam CDDR, gaya ini adalah resultan dari tegangan tali yang tersambung pada end-effector seperti terlihat pada Gambar di bawah ini.

Persamaannya adalah:

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -t_1 \cos \theta_1 - t_2 \cos \theta_2 - t_3 \cos \theta_3 \\ -t_1 \sin \theta_1 - t_2 \sin \theta_2 - t_3 \sin \theta_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\cos \theta_1 & -\cos \theta_2 & -\cos \theta_3 \\ -\sin \theta_1 & -\sin \theta_2 & -\sin \theta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = [-\mathbf{M}]^T \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix}$$

dimana  $t_1, t_2$ , dan  $t_3$ , adalah tegangan pada ketiga tali.

Perhatikan bahwa  $F_x$  dan  $F_y$  diketahui, dan tegangan tali ingin dihitung; kita memiliki 2 persamaan dengan 3 variabel yang tidak diketahui. Jawabannya tidak unik dan tak terbatas kombinasinya. Persamaan untuk menghitung tegangan tali adalah

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \theta_1 & -\cos \theta_2 & -\cos \theta_3 \\ -\sin \theta_1 & -\sin \theta_2 & -\sin \theta_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix}$$

Perhatikan bahwa kita berhadapan dengan sebuah problem yang memerlukan inverse sebuah yang tidak segi-empat. Persoalan inverse seperti ini umum dilakukan dengan menggunakan Moore-Penrose pseudoinverse. Pada artikel ini, konsep pseudoinverse dan dekomposisinya mengikuti konsep pada buku karangan Golub[1].

Perhatikan juga bahwa ada dualitas matriks koefisien pada persamaan  $\{\dot{L}\} = [\mathbf{M}]\{v\}$  dan  $\{t\} = [\mathbf{M}]^{-1}\{F\}$ , yaitu  $[\mathbf{M}]$  dan  $[\mathbf{M}]^{-1}$ . Dualitas ini merupakan akibat dari interkoneksi dan topologi pada robot. Rincian tentang dualitas dapat dibaca pada publikasi yang ditulis oleh Prahasto[3].

**Tegangan pada tali**

Ada beberapa kombinasi yang tidak sah secara fisik, yaitu kombinasi dimana satu atau lebih tali memiliki harga tegangan negatif. Secara fisik teoritik, semua tegangan harus lebih besar atau sama dengan nol. Secara aktual, kita memberi batasan bahwa  $t_i \geq F_\epsilon$  dimana  $F_\epsilon$  adalah tegangan tali yang kecil namun cukup untuk menegangkan tali.

Solusi untuk persoalan di atas adalah dengan menggunakan melakukan dekomposisi matriks Moore-Penrose pseudoinverse menjadi range space dan null space. Contoh pada section berikutnya memperlihatkan contoh perhitungan tegangan tali

**Contoh Perhitungan**

Kita akan mengambil contoh dimana posisi end-effector memberikan sudut tali  $\theta_1 = 45$ ,  $\theta_2 = 30$ , dan  $\theta_3 = -90$ ; satuan sudut dalam derajat. Maka matrix **M** adalah

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0.707 & 0.707 \\ -0.5 & 0.867 \\ 0 & -1. \end{bmatrix} \quad \text{dan}$$

$$-\mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} -0.707 & 0.5 & 0. \\ -0.707 & -0.867 & 1. \end{bmatrix}$$

Null-space  $[-\mathbf{M}^T]$  adalah  $\{0.5175 \ 0.732 \ 1\}^T$ , dan matriks pseudoinverse Moore-Penrose adalah

$$[-\mathbf{M}^T]^+ = [-\mathbf{M}][(-\mathbf{M}^T[-\mathbf{M}])^{-1}]$$

$$= \begin{bmatrix} -0.9168 & -0.2868 \\ 0.7027 & -0.4059 \\ -0.0398 & 0.4455 \end{bmatrix}$$

Kemudian, kita mengasumsikan bahwa gaya tarik tali akan menghasilkan resultan sebesar  $\{F_x, F_y\}^T = \{51.09, 29.5\}^T$ ; harga ini adalah harga acak saja, dan pengujian yang kami lakukan menunjukkan bahwa kesahihan metoda yang ditampilkan di artikel ini tidak tergantung dari harga-harga yang digunakan.

Tegangan tali yang akan menghasilkan resultan seperti yang diinginkan merupakan fungsi dari harga resultan itu sendiri, null space  $[-\mathbf{M}^T]$ , dan matriks pseudoinverse  $[-\mathbf{M}^T]^+$  yaitu,

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = [-\mathbf{M}^T]^+ \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} + \alpha \begin{Bmatrix} 0.5175 \\ 0.732 \\ 1. \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.9168 & -0.2868 \\ 0.7027 & -0.4059 \\ -0.0398 & 0.4455 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 51.09 \\ 29.5 \end{Bmatrix} + \alpha \begin{Bmatrix} 0.5175 \\ 0.732 \\ 1. \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -55.31 + 0.5175\alpha \\ 23.92 + 0.732\alpha \\ 11.11 + \alpha \end{bmatrix}$$

Untuk mendapatkan tegangan tarik (positif), maka hasil di atas menunjukkan bahwa  $\alpha \geq 106.9$ . Pada harga ini, maka tegangan tali adalah:  $\{0.0175, 102.2, 118\}$ ; perhatikan bahwa  $t_1 \approx 0$ , dan tegangan tali lainnya positif (tarik). Resultan tegangan tali dapat dihitung sebagai berikut

$$[-\mathbf{M}^T] \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.707 & 0.5 & 0. \\ -0.707 & -0.867 & 1. \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0175 \\ 102.2 \\ 118. \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 51.08 \\ 29.52 \end{Bmatrix}$$

Terlihat bahwa tegangan tali memang memberikan resultan gaya yang praktis sama dengan resultan yang  $\{F_x, F_y\}$  ditetapkan terdahulu.

Untuk harga  $\alpha$  yang lain yang dipilih sembarang, yaitu  $\alpha = 177$ , harga tegangan tali yang didapatkan adalah  $\{36.28, 153.5, 188.1\}$  dan resultan ketiga tegangan ini adalah  $\{51.08, 29.53\}$ ; praktis sama dengan resultan yang ditetapkan terdahulu. Perbedaan pada digit keempat dari perhitungan adalah konsekuensi dari berbagai pembulatan sepanjang proses perhitungan.

**PENUTUP**

Redundancy telah diperlihatkan, dan kemudian direpresentasikan dengan kombinasi linier dari range space dan kelipatan null space matriks koefisien sistem gaya. Studi kasus dilakukan untuk sebuah posisi dan dua buah sistem gaya ditelaah dalam makalah ini. Hasilnya memperlihatkan konsistensi solusi sesuai dengan karakteristik range space dan null space dari matriks koefisien.

#### DAFTAR PUSTAKA

- [1] G. Golub and C.F. Van Loan. *Matrix Computations*, John Hopkins University Press, 3<sup>rd</sup> edition.
- [2] J.L. Meriam and L.G. Kraige. *Engineering Mechanics - Dynamics*, John Wiley & Sons, Inc., 6<sup>th</sup> edition, 2008.
- [3] T. Prahasto. *Planetary Gear Analysis Using The Vector Network Method*. Master's thesis, University of Waterloo, Canada, 1992.
- [4] M.W. Spong, S. Hutchinson, and M. Vidyasagar. *Robot Modeling and Control*, John Wiley & Sons, Inc., 1<sup>st</sup> edition.
- [5] R.L. Williams II and P. Gallina. Planar Cable-Direct-Driven Robots, Part I: Kinematics and Statics, In *Proceedings of the 2001 ASME Design Technical Conferences 27th Design Automation Conference* September 9-12, 2001, Pittsburgh, PA.
- [6] R.L. Williams II and P. Gallina. Planar Cable-Direct-Driven Robots, Part I: Dynamics and Control, In *Proceedings of the 2001 ASME Design Technical Conferences 27th Design Automation Conference* September 9-12, 2001, Pittsburgh, PA.