

Komparasi Studi Numerik Dan Analitik Konduktivitas Termal Dua Dimensi Pada Kondisi Steady-State

Ahmad Imam Rifa'i^{a,*}, Zainuri Anwar^a, Baiti Hidayati^a, Muhammad Irfan Dzaky^a
Toni Okviyanto^a, Tri Satya Ramadhoni^a, Herlin Sumarna^a,

^aJurusan Teknik Mesin, Politeknik Negeri Sriwijaya
Jl. Srijaya Negara, Bukit Besar – Palembang 30139 Indonesia
*E-mail: imamrf@polsri.ac.id

Abstract

Applications for heat exchangers, energy storage, and thermal management systems all use thermal conduction. The numerical method is very helpful for calculating temperature increases and for reducing larger experimental processes. In this research, a two-dimensional steady state heat conduction problem of a square plate without generating heat or affecting temperature distribution is attempted to be solved using numerical methods. With the help of the Matlab programming language, algorithms were created and used to produce a numerical result utilizing the Finite Difference Method numerical approach. The outcomes from the two distinct approaches analytical and numerical are compared next to one another. The accuracy of the solution approach is indicated by the agreement between the analytical and numerical outcomes.

Kata kunci: matlab; steady state; thermal conductivity

Abstrak

Aplikasi untuk penukar panas, penyimpanan energi, dan sistem manajemen termal semuanya menggunakan konduksi termal. Metode numerik sangat membantu untuk menghitung kenaikan suhu dan untuk mengurangi proses eksperimental yang lebih besar. Dalam penelitian ini, masalah konduksi panas tunak dua dimensi pelat persegi tanpa menghasilkan panas atau mempengaruhi distribusi temperatur dicoba untuk diselesaikan dengan menggunakan metode numerik. Dengan bantuan bahasa pemrograman Matlab, algoritma dibuat dan digunakan untuk menghasilkan hasil numerik dengan menggunakan pendekatan numerik Metode Perbedaan Hingga. Hasil dari dua pendekatan analitis dan numerik yang berbeda dibandingkan satu sama lain. Keakuratan pendekatan solusi ditunjukkan oleh kesepakatan antara hasil analitik dan numerik.

Kata kunci: konduktivitas termal; matlab; tunak

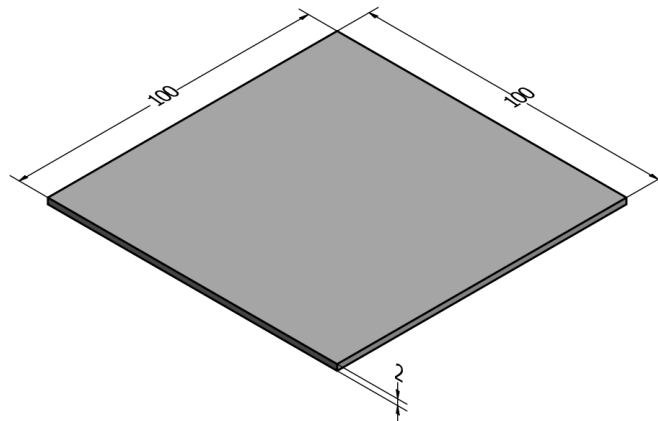
1. Pendahuluan

Konduksi merupakan perpindahan kalor dari daerah bersuhu tinggi ke daerah yang bersuhu rendah dari suatu benda yang diam. Konduksi dapat terjadi pada benda padat, cairan maupun gas. Bentuk umum dari persamaan kalor diperoleh dari hukum kesetimbangan energi yaitu energi tidak dapat diciptakan dan tidak dapat dimusnahkan tetapi dapat dipindahkan dari satu bentuk ke bentuk lainnya. Konduksi termal terdapat pada aplikasi penukar kalor, penyimpanan energi dan sistem manajemen termal [1,2]. Metode perpindahan kalor konduksi dipengaruhi oleh sifat termal material, konduktivitas termal dan panas spesifik material [3]. Metode elemen hingga merupakan metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan termal. Perpindahan kalor konduksi diterapkan pada semua bidang sains dan teknik seperti pembangkit listrik, manufaktur, kimia, metalurgi, pemrosesan material hingga pengujian material tidak merusak [4]. Konduktivitas termal dua dimensi dengan kondisi batas yang sederhana dapat diselesaikan dengan bantuan metode numerik seperti metode elemen batas (BEM), metode volume hingga (FVM), metode beda hingga (FDM) dan metode elemen hingga (FEM). Kanjanakijkasem, 2015 menggunakan metode elemen hingga untuk memprediksi kondisi batas pada material dan kesetabilan distribusi suhu [5]. Roy *et al*, 2017 meneliti tentang konduktivitas termal menggunakan metode elemen hingga pada kumparan pemanas air. Hasil penelitian menunjukkan bahwa metode FEM dapat diterapkan untuk menyelesaikan persamaan konduksi panas dalam kondisi tunak [6]. Perpindahan kalor 2 dimensi pada kondisi tidak tunak telah dilaporkan oleh Wang and Ni, 2019. Metode numerik yang digunakan adalah metode beda hingga untuk mengetahui nilai koefisien perpindahan kalor yang terjadi pada sistem konduksi termal [7]. Kumar *et al*, 2020 melakukan penelitian tentang komparasi teknik iterasi pada konduktivitas termal 2 dimensi yang terdiri dari *Jacobi*, *Gauss Seidel* & *Successive over-relaxation* pada kondisi tunak dan tidak tunak. Pada perpindahan kalor transien, metode SOR merupakan metode yang paling efektif dalam

menyelesaikan analisis perpindahan kalor [8]. Tadeparti and Nandigama, 2022 melakukan pengembangan metode numerik menggunakan Distributed Artificial neural network (DANN) [9]. Tawade, 2022 melaporkan adanya kesesuaian antara hasil analitik dan numerik yang merupakan metode penyelesaian yang akurat dalam menyelesaikan permasalahan konduktivitas kalor dua dimensi dari pelat baja persegi panjang. Metode numerik sangat efisien untuk menyajikan kesalahan $\leq 3\%$, untuk kasus tanpa dan dengan pembangkitan sumber kalor [10]. Keterbaruan dari penelitian ini adalah konduktivitas kalor 2 dimensi dianalisis dengan menggunakan studi numerik dan analitik. Solusi numerik menggunakan metode *finite difference metode* (FDM) sedangkan studi analitik dibangun dengan mengembangkan bahasa pemrograman *visual basic for application* (VBA) selanjutnya simulasi distribusi kalor menggunakan bahasa pemrograman *Matlab*. Solusi komputasi dan analitik kemudian dibandingkan sehingga metode numerik menjadi lebih akurat dan efisien.

2. Material dan metode penelitian

Pada penelitian ini konduktivitas kalor dua dimensi dianalisis pada pelat datar dengan dimensi 100 x 100 x 2 mm. Material pelat yang digunakan dalam analisis perpindahan kalor konduksi 2 dimensi terbuat dari material pelat baja. Asumsi pada penelitian ini adalah: (1) konduksi kalor 2D dalam kondisi tunak, (2) sifat material yang konstan dan tidak adanya sumber kalor internal (3) perpindahan kalor konveksi dan radiasi diabaikan. Dimensi dari pelat datar yang digunakan dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Dimensi pelat

2.1 Data Processing

Untuk menetapkan distribusi kalor pada suatu zat padat, metode numerik sering kali digunakan dalam perhitungan perpindahan kalor. Metode yang paling banyak digunakan adalah metode beda hingga dan metode elemen hingga. Metode beda hingga didasarkan pada persamaan diferensial dari konduktivitas termal yang ditransformasikan menjadi persamaan numerik. Nilai suhu akan dihitung dalam titik (*node*) jaringan. Sedangkan metode elemen hingga berdasarkan pada persamaan integral dari konduktivitas termal. Perpindahan kalor konduksi dua dimensi untuk kondisi tunak dalam koordinat *Cartesian* dapat ditulis oleh persamaan (1)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

dimana x dan y masing-masing merupakan koordinat horizontal dan vertikal. T adalah suhu lokal pada posisi tertentu (x,y). k adalah konduktivitas termal dari pelat. Persamaan (1) merupakan persamaan dasar dari *Laplace Equation*. Turunan pada lokasi titik (*node*) interior (x,y) pada persamaan (1) dapat didekati dengan persamaan (2) dan (3)

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_{x,y} = \frac{T(x + \Delta x, y) - 2T(x, y) + T(x - \Delta x, y)}{\Delta x^2} \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_{x,y} = \frac{T(x, y + \Delta y) - 2T(x, y) + T(x, y - \Delta y)}{\Delta y^2} \quad (3)$$

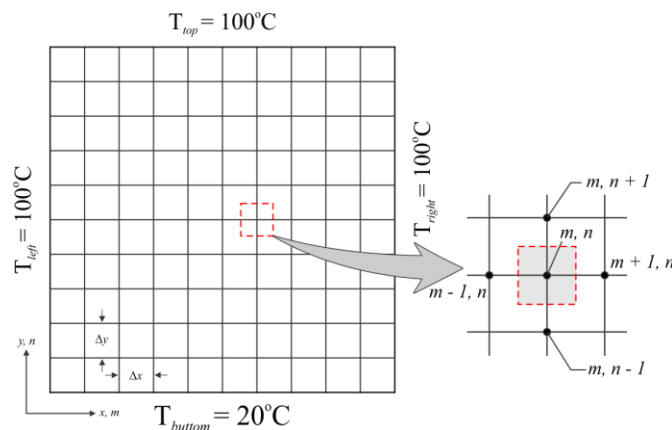
substitusi koordinat spasial pada persamaan (2) dan (3) sebagai indeks berjalan : (x,y) sebagai (m,n), ($x+\Delta x,y$) sebagai ($m+1,n$) dan ($x-\Delta x,y$) sebagai ($m-1,n$), ($x,y+\Delta y$) sebagai ($m,n+1$) dan ($x,y-\Delta y$) sebagai ($m,n-1$) merupakan representasi berbasis perbedaan hingga yang dihasilkan dari persamaan (1) seperti yang ditunjukkan pada persamaan (4) di bawah ini. Di sini nilai konduktivitas termal (k) diasumsikan konstan di seluruh pelat.

$$\frac{T_{(m+1,n)} - 2T_{(m,n)} + T_{(m-1,n)}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{(m,n+1)} - 2T_{(m,n)} + T_{(m,n-1)}}{(\Delta y)^2} \quad (4)$$

Jika suhu di $\Delta x = \Delta y$, maka persamaan (4) dapat disubstitusi menjadi persamaan (5) dibawah ini

$$T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 4T_{m,n} = 0 \quad (5)$$

Pelat datar 2D pada arah horizontal telah di identifikasikan dengan m sedangkan arah vertical di identifikasi dengan n yang terbagi menjadi kisi-kisi dengan interval (Δx dan Δy) yang sama. Arah x dan y terbagi oleh 1 titik (m, n) yang digunakan sebagai node dalam perhitungan iterasi. Persamaan (5) selanjutnya dimasukkan kedalam proses iterasi dengan nilai iterasi maksimum dan perubahan nilai maksimum masing-masing adalah 100 dan 0,001. Sisi pelat datar memiliki masing-masing suhu $T_{top} = 100^\circ\text{C}$, $T_{bottom} = 20^\circ\text{C}$, $T_{left} = 100^\circ\text{C}$, $T_{right} = 100^\circ\text{C}$. Titik konfigurasi persamaan beda-hingga ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 2. Titik konfigurasi persamaan beda-hingga

Solusi analitik dari perpindahan kalor konduksi 2D ditunjukkan pada persamaan (6). Kesalahan maksimum antara persamaan numerik dan analitik berada pada kisaran kurang dari 5%. Setelah dilakukan validasi program *Matlab* dilakukan, selanjutnya analisis numerik lanjutan juga telah dilakukan.

$$T_{(x,y)} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sinh \frac{n\pi y}{L} \quad (6)$$

where A_n 's are constant determined from boundary condition at $y = l_y$.

Untuk $f(x) = T_0 \sin \frac{\pi x}{L}$, $A_n \neq 0$; $n = 1$; $A_1 = \frac{T_0}{\sinh \frac{\pi y}{l_x}}$

$$T_{(x,y)} = T_0 \frac{\sin \frac{\pi x}{l_x} \sinh \frac{\pi y}{l_x}}{\sinh \frac{\pi y}{l_x}} \quad (7)$$

2.2 Visual Basic for Application (VBA)

Visual Basic for Application (VBA) merupakan program berbasis Windows mulai yang sederhana sampai pemrograman yang lebih kompleks. Program *Visual Basic for Application (VBA)* digunakan untuk memvalidasi perhitungan data yang menggunakan analisis numerik. Selanjutnya solusi analitik pada persamaan (8), (8a-8d) selanjutnya dijadikan bahasa pemrograman *visual basic*.

$$T_{(x,y)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \sinh \left(\frac{\pi n (b-y)}{a} \right) + B_n \sinh \left(\frac{\pi n y}{a} \right) \right] \sin \left(\frac{\pi n y}{a} \right) + \left[C_n \sinh \left(\frac{\pi n (a-y)}{b} \right) + D_n \sinh \left(\frac{\pi n y}{b} \right) \right] \sin \left(\frac{\pi n y}{b} \right) \quad (8)$$

$$A_n = \frac{2}{a \sinh(\pi b n / a)} \int_0^a T_{Bottom}(x) \sin \left(\frac{\pi n x}{a} \right) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8a)$$

$$B_n = \frac{2}{a \sinh(\pi b n / a)} \int_0^a T_{Top}(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8b)$$

$$C_n = \frac{2}{b \sinh(\pi b n / b)} \int_0^b T_{Left}(x) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) dy, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8c)$$

$$D_n = \frac{2}{b \sinh(\pi a n / b)} \int_0^b T_{Right}(y) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) dy, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8d)$$

Berdasarkan hasil substitusi solusi analitik pada persamaan (8a-8d) atau yang lebih dikenal dengan *VBA Laplace Equation*, selanjutnya dikembangkan dengan menambahkan *module visual basic* pada menu *Developer Microsoft excel*, sehingga program *VBA* dapat dijalankan melalui formula *Microsoft Excel =laplace* (arah x, m : arah y, n). *Module VBA Laplace Equation* yang digunakan pada penelitian ini dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. *Module VBA Laplace Equation*

Program
<pre>Public Const PI = 3.14159265358979, Nmax = 25 Public Function laplace(x, y) S = 0 For n = 1 To Nmax An = 40 * (1 - Cos(PI * n)) / (PI * n * WorksheetFunction.Sinh(PI * n)) Bn = 5 * An Cn = 5 * An Dn = 5 * An T1 = An * Sin(PI * n * x) * WorksheetFunction.Sinh(PI * n * (1 - y)) T2 = Bn * Sin(PI * n * x) * WorksheetFunction.Sinh(PI * n * y) T3 = Cn * WorksheetFunction.Sinh(PI * n * (1 - x)) * Sin(PI * n * y) T4 = Dn * WorksheetFunction.Sinh(PI * n * x) * Sin(PI * n * y) S = S + T1 + T2 + T3 + T4 Next n laplace = S</pre>

2.3. Matlab

Program *Matlab* juga telah dikembangkan untuk mensimulasikan distribusi suhu yang telah didapatkan berdasarkan hasil perhitungan numerik dan analitik. *Editor* pada program *Matlab* telah dibuat berdasarkan dimensi bangun datar yang berbentuk persegi sehingga nilai $y=x$. Masukkan program terdiri dari 19 baris perintah. Baris ke 1-6 merupakan pengaturan awal untuk pembuatan tabel iterasi dan penentuan posisi *cell* batas distribusi suhu. Baris 7-8 merupakan kondisi suhu batas pada pelat datar yang terdiri dari $T_{top} = 100^\circ\text{C}$, $T_{bottom} = 20^\circ\text{C}$, $T_{left} = 100^\circ\text{C}$, $T_{right} = 100^\circ\text{C}$ dengan besaran nilai $dx=0.01$ dengan tingkat toleransi 0,001. Selanjutnya persamaan (5) diterjemahkan ke dalam program *Matlab* pada line 9 – 14 untuk menghasilkan nilai dari perhitungan iterasi. Distribusi suhu dari 4 (empat) sisi pelat diilustrasikan oleh program *Matlab* line 18-19. Program *Matlab* yang digunakan dapat dilihat pada Tabel 2.

Tabel 2. Program *Matlab R2017a*

Line	Persamaan
1	<code>clc</code>
2	<code>clear</code>
3	<code>close</code>
4	<code>dx=0.01;</code>
5	<code>x=0:dx:1;y=x;</code>
6	<code>T0=ones(length(x),length(y)) % Initial value</code>
7	<code>T0(1,:)=100; T0(end,:)=20; T0(:,1)=100; T0(:,end)=100;</code>
8	<code>T=T0; error=1; Tol=0.001;</code>
9	<code>while abs(error)>Tol</code>
10	<code>for m=2:length(y)-1</code>
11	<code>for n=2:length(x)-1</code>
12	<code>T(m,n)=(T0(m+1,n)+T0(m-1,n)+T0(m,n+1)+T0(m,n-1))/4;</code>
13	<code>end</code>
14	<code>end</code>
15	<code>error=max(max(T-T0));</code>

```

16     T0=T;
17     end
18     pcolor(x,y,flip(T)), shading interp, colormap jet
19     colorbar,xlabel('x(m)'),ylabel('y(m)'),title('T(^oC)')
    
```

3. Hasil dan Pembahasan

Hasil penelitian diambil berdasarkan hasil iterasi perpindahan kalor konduksi dua dimensi untuk kondisi tunak dengan menggunakan analisis numerik dan analitik. Perpindahan kalor konduksi dua dimensi terdiri dari arah x dan arah y . Arah x dan y memiliki 10 titik konfigurasi (*node*) masing-masing yang terdiri dari $m=0$ hingga $m=10$ dan $n=0$ hingga $n=10$. *Node* $m,n=0$ merupakan *node* suhu untuk kondisi batas kiri dan bawah, sedangkan $m,n=10$ merupakan suhu kondisi batas bagian kanan dan atas dari pelat datar. Perhitungan iterasi numerik dilakukan pada nodal $m,n=1$ hingga $m,n=9$. Hasil perhitungan numerik dapat dilihat pada Tabel 3.

Tabel 3. Hasil iterasi numerik

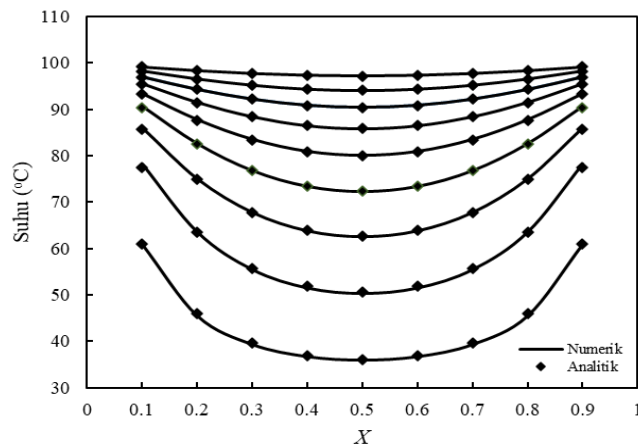
l	$n = 10$	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
0.90	$n = 9$	100	99.1	98.3	97.7	97.3	97.2	97.3	97.7	98.3	99.1	100
0.80	$n = 8$	100	98.1	96.5	95.2	94.3	94.1	94.3	95.2	96.5	98.1	100
0.70	$n = 7$	100	97.0	94.3	92.2	90.8	90.4	90.8	92.2	94.3	97.0	100
0.60	$n = 6$	100	95.4	91.4	88.4	86.5	85.8	86.5	88.4	91.4	95.4	100
0.50	$n = 5$	100	93.4	87.7	83.4	80.9	80.0	80.9	83.4	87.7	93.4	100
0.40	$n = 4$	100	90.4	82.4	76.8	73.5	72.4	73.5	76.8	82.4	90.4	100
0.30	$n = 3$	100	85.7	74.9	67.8	64.0	62.8	64.0	67.8	74.9	85.7	100
0.20	$n = 2$	100	77.5	63.5	55.7	51.8	50.6	51.8	55.7	63.5	77.5	100
0.10	$n = 1$	100	60.9	46.0	39.7	36.9	36.1	36.9	39.7	46.0	60.9	100
0	$n = 0$	60	20	20	20	20	20	20	20	20	20	60
y		$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$	$m = 8$	$m = 9$	$m = 10$
	x	0	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1

Dalam iterasi perpindahan kalor konduksi dua dimensi untuk kondisi tunak dilakukan dengan bantuan program *visual basic for application (VBA)* dengan *node* yang digunakan adalah arah x dan y dengan menerakan formula *=laplace* (arah x,m : arah y,n). Iterasi dilakukan pada *node* $m,n=0$ hingga $m,n=10$. Hasil perhitungan analitik dapat dilihat pada Tabel 4.

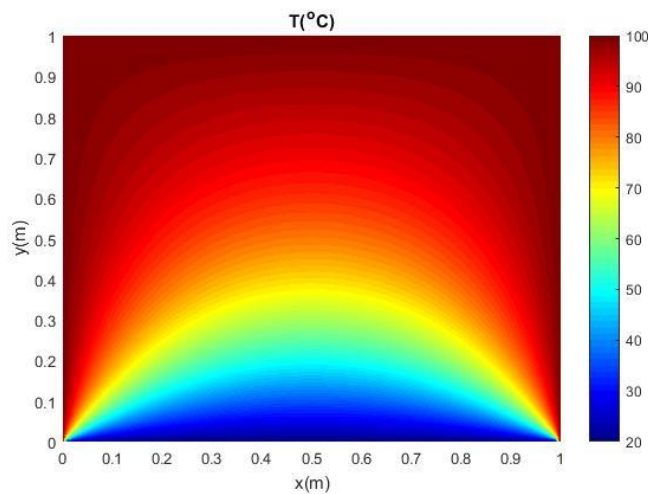
Tabel 4. Hasil iterasi analitik

l	$n = 10$	101.5	102	103	98	99	102	99	98	103	102	101.5
0.90	$n = 9$	102	99.1	98.3	97.7	97.3	97.2	97.3	97.7	98.3	99.1	102
0.80	$n = 8$	103	98.2	96.5	95.2	94.4	94.1	94.4	95.2	96.5	98.2	103
0.70	$n = 7$	98	97.0	94.3	92.2	90.9	90.4	90.9	92.2	94.3	97.0	98
0.60	$n = 6$	99	95.5	91.5	88.4	86.5	85.9	86.5	88.4	91.5	95.5	99
0.50	$n = 5$	102	93.5	87.8	83.5	80.9	80.0	80.9	83.5	87.8	93.5	102
0.40	$n = 4$	99	90.6	82.6	76.8	73.5	72.4	73.5	76.8	82.6	90.6	99
0.30	$n = 3$	98	86.0	75.0	67.8	63.8	62.6	63.8	67.8	75.0	86.0	98
0.20	$n = 2$	103	78.1	63.5	55.5	51.5	50.3	51.5	55.5	63.5	78.1	103
0.10	$n = 1$	102	60.9	45.4	39.2	36.6	35.9	36.6	39.2	45.4	60.9	102
0	$n = 0$	60.9	20	21	20	20	20	20	20	21	20	60.9
y		$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$	$m = 8$	$m = 9$	$m = 10$
	x	0	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1

Studi analitik digunakan sebagai dasar perhitungan komputasi konduktivitas termal dengan metode beda hingga harus memiliki kesepakatan yang sama pada nilai perpindahan kalor konduksi yang dihasilkan pada sebuah pelat datar. Dari hasil penelitian di laporkan bahwa studi numerik metode beda hingga yang dilakukan memiliki kesepakatan yang baik dengan studi analitik hasil pengembangan program *VBA*. Komparasi dilakukan pada semua sisi dari arah $y_0 / n=1$ hingga $y_1 / n=9$ dan arah $x_0 / m=1$ hingga $x_1 / m=9$. Hasil penelitian menunjukkan kesesuaian antara nilai perhitungan analitik dan numerik berada pada kisaran kurang dari 3%. Komparasi antara nilai hasil perhitungan numerik dan analitik dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3. Komparasi antara numerik dan analitik



Gambar 4. Kontur suhu pada pelat

Gambar 4 menunjukkan visualisasi suhu yang terjadi pada pelat datar pada arah sumbu x dan y . Kontur suhu dapat memberikan gambaran yang jelas tentang tegangan termal (*thermal stress*) yang dialami oleh pelat pada kondisi tunak. perpindahan kalor dari daerah bersuhu tinggi ke daerah yang bersuhu rendah dari suatu benda yang diam. Perpindahan kalor konduksi tersebut dipengaruhi oleh sifat termal material, konduktivitas termal dan panas spesifik material. Oleh karena itu teknisi dapat mengembangkan teknik yang tepat dalam melaksanakan pekerjaan teknik dengan mempertimbangkan konsentrasi tegangan termal yang dialami oleh pelat.

4. Kesimpulan

Konduktivitas kalor dua dimensi pelat datar pada kondisi *steady-state* telah dilakukan dengan menggunakan metode analitik dan numerik sehingga dapat diambil kesimpulan bahwa studi analitik dapat digunakan sebagai dasar perhitungan komputasi konduktivitas termal pada sebuah pelat datar. Selanjutnya luaran program *Matlab* dapat menghasilkan kontur suhu yang menggambarkan variasi suhu yang terjadi pada setiap sisi pelat. Metode numerik dan analitik memiliki nilai kesesuaian yang sangat baik yaitu $\leq 3\%$.

Ucapan Terima Kasih

Penelitian ini di dukung oleh Jurusan Teknik Mesin Politeknik Negeri Sriwijaya.

Daftar Pustaka

- [1] Yohana E, Suryo MT, Ambari I, Permana R, Indrayani NL. Analisis Perpindahan Panas dan Exergi pada Boiler Wanson I Tipe Fire Tube. *Rotasi*. 2018;20(2):78.
- [2] Utomo MTS, Yohana E, Khoiriyah MA. Analisis Distribusi Temperatur dan Aliran Fluida pada Proses Pengeringan Butiran Teh Bentuk Silinder Di Dalam Fluidized Bed Dryer Menggunakan Computational Fluid Dynamic (CFD). *Rotasi*. 2019;20(4):237.
- [3] Sârbu I. Numerical analysis of two dimensional heat conductivity in steady state regime. *Period Polytech Mech Eng*. 2005;49(2):149–62.
- [4] Mo JPT, Cheung SCP, Das R. Two-Dimensional and Transient Heat Conduction. *Demystifying Numer Model*. 2019;87–107.
- [5] Kanjanakijkasem W. A finite element method for prediction of unknown boundary conditions in two-dimensional steady-state heat conduction problems. *Int J Heat Mass Transf [Internet]*. 2015;88:891–901. Available from: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.05.019>
- [6] Roy D, Kumar A, Kumar P. A mathematical analysis of two dimensional steady state heat conduction in the coil of an induction heater using finite element method. 2017;97(3):214–9.
- [7] Wang S, Ni R. Solving of Two-Dimensional Unsteady-State Heat-Transfer Inverse Problem Using Finite Difference Method and Model Prediction Control Method. *Complexity*. 2019;2019.
- [8] Kumar R, Kumar V, Sinha A. 2-D Heat Conduction Analysis of a Square Slab for Steady and Transient Behaviour Using Various Iterative Solvers *Abstract* : 2020;3(6):1218–23.
- [9] Tadeparti S, Nandigana VVR. Convolutional neural networks for heat conduction. *Case Stud Therm Eng [Internet]*. 2022;38(September 2021):102089. Available from: <https://doi.org/10.1016/j.csite.2022.102089>
- [10] Prof. S. V. Tawade. Comparative Analysis of Two-Dimensional Steady State Heat Flow Problem of a Rectangular Plate by Analytical and Numerical Approach. *Int J Adv Res Sci Commun Technol*. 2022;2(1):405–12.