

## Analisis Perbandingan Kontak Mekanik pada Permukaan *Sinusoidal* dengan Variasi Kondisi Pelumasan Menggunakan Metode Elemen Hingga

Syaiful Anwar<sup>a,c\*</sup>, M. Danny Pratama Lamura<sup>b,c</sup>, J. Jamari<sup>a,c</sup>, Athanasius Priharyanto Bayuseno<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Departemen Teknik Mesin, Fakultas Teknik, Universitas Diponegoro  
Jl. Prof. Sudarto, SH., Tembalang-Semarang 50275

<sup>b</sup>Departemen Teknik Mesin, Fakultas Teknik dan Sains, Universitas Pembangunan Nasional Veteran Jawa Timur  
Jl. Raya Rungkut Madya, Gunung Anyar, Surabaya 60294

<sup>c</sup>Undip Biomechanics Engineering & Research Centre (UBM-ERC), Universitas Diponegoro  
Jl. Prof. Sudarto, SH., Tembalang-Semarang 50275

\*E-mail: syaifulanwar1822@gmail.com

### Abstract

The study of contact between two surfaces is of great interest regarding friction, lubrication, and wear. Contact mechanics plays a vital role in the field of tribology. This study aims to determine the phenomena that occur in modeling entrapped oil in unlubricated and lubricated conditions in sinusoidal geometry. The simulation process was carried out using the Finite Element Method (FEM) with the help of Abaqus CAE 2020 software. The geometry was modeled as 2D axisymmetric with an element size of 0.01 for flat rigid and 0.0005 for geometry models. The study was conducted on a model with a height of 2 mm and a cavity depth of 0.02 mm that was pressurized (0.5 MPa - 640 MPa) from the bottom of the model. This study reviews the results of von Mises stress, contact area, and deformation in each variation condition. The results showed that the sinusoidal model in lubricated contact produced smaller values of von Mises stress, contact area, and deformation than the sinusoidal model in dry contact. In the von Mises stress parameter, the variation of lubrication conditions applied resulted in a difference of 28.41%. Meanwhile, for the contact area and deformation parameters, the difference in lubrication conditions gave a difference in results of 42.79% and 16.46%, respectively. This analysis is very important for researchers to understand the significant influence of lubricants on mechanical contact.

**Keywords:** contact mechanics, tribology, von Mises stress, contact area, deformation

### Abstrak

Studi tentang kontak antara dua permukaan sangat menarik untuk dipelajari karena berhubungan dengan gesekan, pelumasan, dan keausan. Mekanika kontak berperan sangat penting dalam bidang tribologi. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui fenomena-fenomena yang terjadi pada pemodelan *entrapped oil* dalam kondisi kontak kering dan kontak berpelumas pada geometri *sinusoidal*. Proses simulasi dilakukan menggunakan *Finite Element Method* (FEM) dengan bantuan *software Abaqus CAE 2020*. Bentuk geometri dimodelkan sebagai *axisymmetric* 2D dengan ukuran elemen 0,01 untuk plat kaku dan 0,0005 untuk model geometri. Penelitian dilakukan pada model dengan ketinggian 2 mm dan memiliki kedalaman *cavity* 0,02 mm yang diberikan tekanan (0,5 MPa - 640 MPa) dari bawah model. Penelitian ini meninjau hasil *von Mises stress*, *contact area*, dan deformasi pada setiap kondisi variasi. Hasil penelitian menunjukkan bahwa model *sinusoidal* pada kontak berpelumas menghasilkan nilai *von Mises stress*, *contact area*, dan deformasi yang lebih kecil dibandingkan model *sinusoidal* pada kontak kering. Pada parameter tegangan *von Mises*, variasi kondisi pelumasan yang diterapkan menghasilkan perbedaan sebesar 28,41%. Sementara itu, untuk parameter area kontak dan deformasi, perbedaan kondisi pelumasan memberikan perbedaan hasil masing-masing sebesar 42,79% dan 16,46%. Analisis ini sangat penting bagi para peneliti untuk memahami pengaruh signifikan pelumas dalam kontak mekanik.

**Kata kunci:** mekanika kontak, tribologi, *von Mises stress*, *contact area*, *deformation*

### 1. Pendahuluan

Mekanika kontak memegang peranan penting dalam tribologi, yaitu cabang ilmu yang mengkaji interaksi antara dua permukaan benda. Kajian ini meliputi aspek gesekan, pelumasan, dan keausan. Awalnya mekanika kontak digunakan untuk mempelajari interaksi elemen-elemen besar, seperti kontak antara rel dan roda kereta api atau distribusi tegangan pada pondasi suatu bangunan, dengan asumsi kontinu dan homogen [1]. Namun perkembangan industri saat ini sudah mengalami kemajuan pesat dan sudah mencapai tingkat *micromanufacturing* [2]. Permukaan suatu benda yang tampak halus sebenarnya tidak mulus, melainkan memiliki kontur puncak dan lembah yang tidak beraturan dalam skala mikro

yang disebut *asperities*. Kontak asperitas dapat mewakili fenomena yang terjadi ketika dua permukaan material saling bersentuhan karena adanya gaya luar [3].

Teori kontak pada benda padat pertama kali ditemukan oleh Hertz, yang menyelesaikan masalah deformasi elastis antara dua permukaan lengkung yang bersentuhan [4]. Serangkaian studi mekanika kontak dilakukan dalam dua kondisi yaitu dengan pelumasan [5] dan tanpa pelumas [6]. Penelitian yang dilakukan saat ini terinspirasi dari studi topik dengan menggunakan model penelitian yang baru, seperti yang sudah dilakukan oleh Zwicker et al., Hafis et al., dan Shvart et al.

Zwicker et al. membuat model silinder sederhana dengan permukaan rongga yang diperbesar dan diisi dengan pelumas, dalam hal ini minyak. Model ini digunakan untuk melakukan studi numerik dan eksperimental yang menganalisis pengaruh kekuatan tekan pelumas dan integritas material terhadap deformasi model silinder. Hasil penelitian ini menyimpulkan bahwa deformasi tidak sepenuhnya dipengaruhi oleh perbedaan pelumas pada kondisi hidrostatik [7]. Namun penelitian ini memerlukan validasi karena desain model, seperti parameter sudut kemiringan permukaan, belum dipertimbangkan secara komprehensif. Menurut Hafis et al. sudut kemiringan dapat mengakibatkan penyegelan pelumas secara menyeluruh, namun belum ada analisis komprehensif yang mendukung hipotesis tersebut sehingga menimbulkan pertanyaan mengenai dampaknya terhadap hasil akhir percobaan [8].

Selanjutnya, Shvart et al. melakukan penelitian tentang cairan yang terperangkap dengan menggunakan model *sinusoidal*. Model ini berfungsi sebagai asperiti pada fase elastik-plastik, dengan menambahkan efek pelumas pada kontak asperiti untuk menentukan area kontak dan daya tarik gesekan yang paling besar. Penelitian terus berlanjut pada model kontak asperiti tunggal dalam kondisi elastik-plastik [9]. Namun, model ini hanya melihat geometri yang terisolasi dan mengabaikan interaksi antar asperiti dan material di bawahnya. Padahal asperiti saling berinteraksi dan memiliki ketebalan material di bawahnya, dan efek pelumas mempengaruhi kontak permukaan. Mengingat kompleksitas interaksi antar asperiti dan pengaruh pelumas dalam aplikasi praktis, ini dapat menjadi subjek penelitian yang menarik.

Penelitian ini bertujuan untuk menginvestigasi pengaruh kondisi pelumasan pada model geometri *sinusoidal* dengan menggunakan metode elemen hingga. Parameter-parameter yang ditinjau dalam penelitian ini meliputi perubahan *contact area*, tegangan *von Mises*, dan deformasi. Melalui analisis deformasi dan tekanan kontak, penelitian ini bertujuan untuk memberikan gambaran praktis tentang perbedaan kondisi pelumasan pada kondisi terperangkap. Diharapkan bahwa penelitian ini dapat diterapkan pada bidang kesehatan seperti mekanisme *synovial joint* [10]. Hal ini disebabkan oleh fakta bahwa *synovial* mengandung cairan sehingga dapat bergerak secara bebas. Dikarenakan mempunyai prinsip kerja yang sama yaitu dengan memberikan beban kepada badan dari kerangka aksial ke sendi gerah bawah, penelitian ini juga dapat diterapkan dalam biomekanika sendi paha.

## 2. Material dan metode penelitian

### 2.1 Material Properties

Dalam penelitian ini, material yang digunakan adalah *Aluminium* ( $E = 70 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0,33$ ,  $\rho = 2,7 \times 10^{-9} \text{ ton/mm}^3$ ), dengan  $E$  sebagai modulus elastisitas,  $\nu$  sebagai rasio Poisson, dan  $\rho$  sebagai massa jenis. Sementara itu, pelumas dimodelkan sebagai *fluid cavity* dengan sifat fluida berupa *bulk modulus* sebesar  $2000 \text{ MPa}$  dan densitas sebesar  $8,2 \times 10^{-10} \text{ ton/mm}^3$  [9].

Menurut Shvart et al. fluida memiliki dua karakteristik utama yaitu dapat dimampatkan (kompresibel) dan tidak dapat dimampatkan (inkompresibel). Model fluida kompresibel dalam pelumasan hidrodinamik mempertimbangkan bahwa fluida pelumas dapat mengalami perubahan densitas (*density*) sebagai respons terhadap variasi tekanan. Hal ini berbeda dari model fluida inkompresibel, dimana densitas dianggap konstan. Model fluida kompresibel dalam pelumasan hidrodinamik dirancang untuk menggambarkan perilaku fluida secara lebih akurat, terutama dalam kondisi tekanan rendah yang memicu *cavitation* [11].

Beberapa asumsi digunakan untuk menyederhanakan pemodelan dan simulasi dalam penelitian ini. Permukaan *sinusoidal* diasumsikan memiliki profil geometri yang ideal atau ketidakteraturan tambahan, sedangkan material permukaan yang dapat dideformasi dianggap elastis dan isotropik. Plat kaku dianggap sepenuhnya kaku sehingga tidak dapat terdeformasi selama simulasi. Interaksi antara permukaan *sinusoidal* dan bidang diasumsikan sebagai kontak tanpa gesekan. Beban diterapkan secara merata pada permukaan kontak sebagai tekanan normal yang seragam. Selain itu, pelumas dianggap sebagai fluida kompresibel, sehingga perubahan densitasnya akibat variasi tekanan turut diperhitungkan dalam pemodelan. Pengaruh suhu dan efek termal diabaikan, sehingga hasil simulasi bergantung sepenuhnya pada interaksi mekanis antara kedua permukaan. kedua permukaan.

### 2.2 Kontak Kering pada Permukaan Sinusoidal

Teori kontak pada benda padat pertama kali dikenalkan oleh Hertz untuk menyelesaikan masalah deformasi elastis antara dua permukaan lengkung yang bersentuhan [4]. Persamaan kontak yang diberikan oleh Hertz adalah sebagai berikut.

$$E^* = \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)^{-1} \quad \text{Persamaan 1}$$

dimana  $E^*$  adalah modulus elastisitas efektif,  $E$  adalah modulus elastisitas, dan  $\nu$  adalah *poisson ratio* [12].

Para peneliti tidak hanya menggunakan model *spherical* untuk menggambarkan kekasaran permukaan, tetapi juga model lain seperti model *sinusoidal*. Westergaard termasuk salah satu pelopor yang menerapkan pemodelan elastis dua dimensi dengan variabel kompleks pada model *sinusoidal* dengan melakukan penyederhanaan dua dimensi. Westergaard memodelkan kontak asperiti dalam kondisi kering dan menghasilkan *Westergaard's Solution* yaitu sebagai berikut.

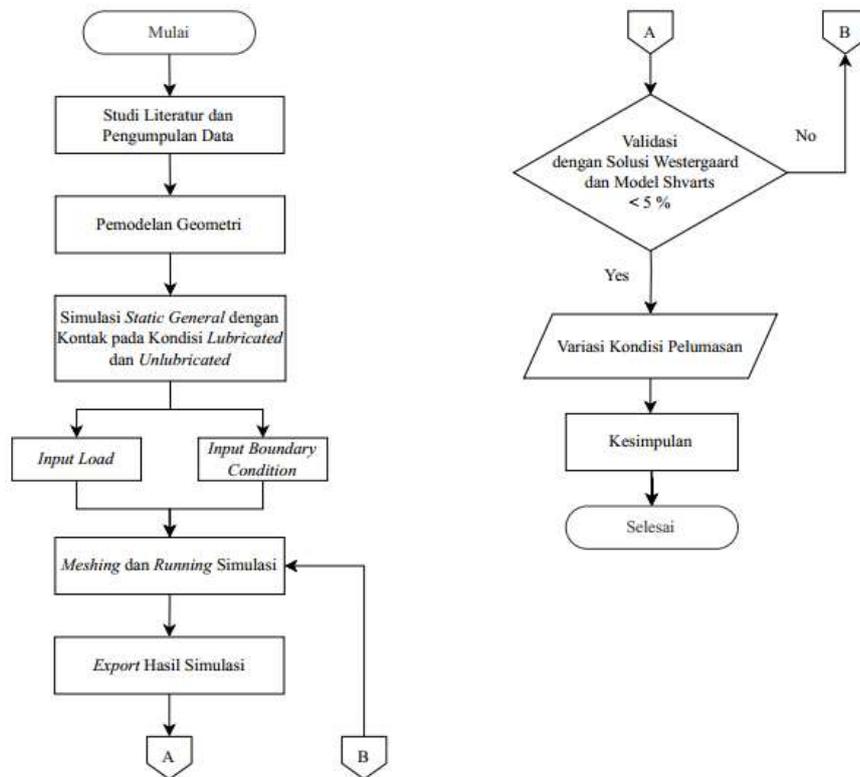
$$\frac{A}{A_0} = \frac{2a}{\lambda} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{p_0}{p^*}}, 0 \leq p_0 \leq p^* \tag{Persamaan 2}$$

$$p^* = \frac{\pi E^* \Delta}{\lambda} \tag{Persamaan 3}$$

dimana  $a$  adalah *real contact area*,  $\lambda$  adalah panjang gelombang,  $p_0$  adalah *external pressure*, dan  $p^*$  adalah tekanan yang diperlukan untuk membuat seluruh permukaan berkontak [13].

### 2.3 Diagram Alir Penelitian

Penelitian ini terdapat beberapa proses desain dan *running* simulasi menggunakan *software Abaqus CAE 2020*. Pada Gambar 1 di bawah ini menunjukkan langkah-langkah pada penelitian yang dilakukan.



Gambar 1. Diagram Alir Penelitian

### 2.4 Finite Element Method

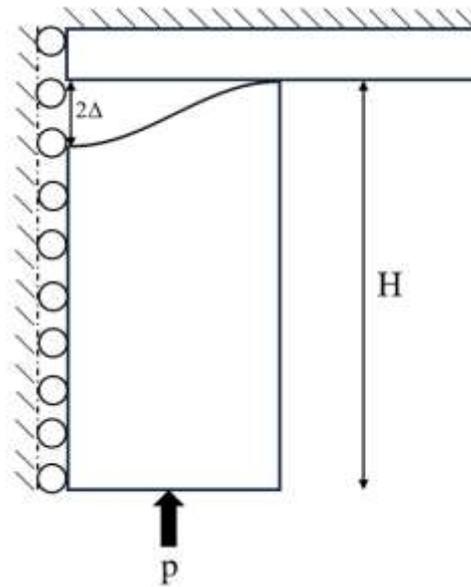
Analisis elemen hingga pada penelitian ini dilakukan menggunakan *software Abaqus CAE*. Pemodelan dilakukan menggunakan pendekatan 2D *axisymmetric*, yang merupakan penyederhanaan dari model 3D untuk meningkatkan efisiensi waktu komputasi. Dalam penelitian ini, model elemen hingga menggunakan ukuran *mesh* sebesar 0,01 untuk plat kaku (*rigid plate*) dan 0,0005 untuk model *sinusoidal*. Elemen *mesh* berbentuk *quadrilateral (quad)* dipilih karena kemampuannya yang efektif dalam komputasi terutama pada geometri yang terstruktur, sehingga memastikan konsistensi dan akurasi hasil. Proses simulasi menggunakan metode *Static General* yang dirancang untuk analisis statis, baik dalam kondisi *linier* maupun *nonlinier*, guna memperoleh hasil dengan tingkat akurasi yang tinggi.

Gambar 2 di bawah ini menunjukkan hubungan permukaan antara *sinusoidal* dan plat kaku. Plat kaku diberikan *pressure (P)* sebesar 0 hingga 640 N dari bawah geometri *sinusoidal*. Bagian plat kaku memiliki panjang 1 mm dan lebar 0.1 mm, sedangkan model *sinusoidal* memiliki kedalaman *cavity* 0,02 mm dan lebar 0,5 mm dengan ketinggian model 2 mm. Dalam proses simulasi, beberapa kondisi batas diterapkan. Pada bagian plat kaku ditumpu mati sehingga tidak dapat bergerak bebas pada arah manapun. Pada geometri bawah di sisi bagian kanan dan kiri ditumpu pada arah horizontal sehingga geometri dapat bergerak bebas pada arah vertikal. Ketinggian model geometri mengikuti aturan yang ditetapkan

oleh Shvarts et al. dan dapat dihitung menggunakan Persamaan 4, di mana  $2\Delta$  merupakan kedalaman cavity, dan  $H$  adalah ketinggian model.

$$\frac{\Delta}{H} = 0.005$$

Persamaan 4

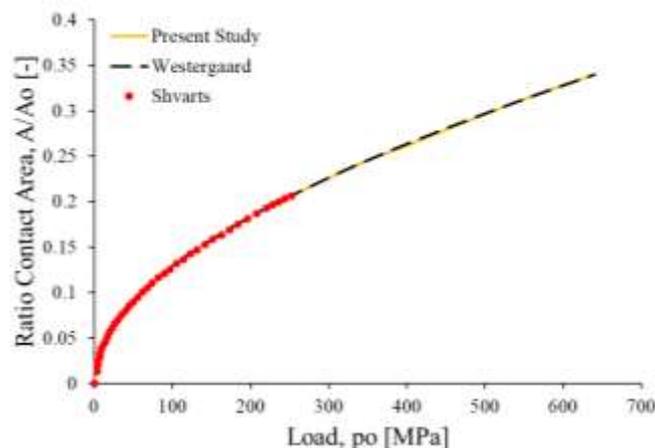


Gambar 2. Pemodelan *Entrapped Oil*

### 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

#### 3.1 Perbandingan Analisis Studi Saat Ini dengan Hasil Studi Sebelumnya

Penelitian ini menindaklanjuti dari penelitian Shvarts et al. dengan fokus pada analisis pengaruh kondisi pelumasan terhadap hasil simulasi yang diperoleh. Simulasi kontak kering pada penelitian ini menunjukkan hasil yang sesuai dengan perhitungan analitik Westergaard seperti yang terlihat pada Gambar 3. Seperti yang terlihat bahwa *contact area* ( $A$ ) meningkat seiring dengan bertambahnya beban akibat tekanan ( $p_0$ ) pada bagian bawah geometri. Dimana  $A/A_0$  merupakan *ratio contact area* dan  $A_0$  adalah luas kontak awal tanpa tekanan tambahan, digunakan untuk mengevaluasi perubahan luas kontak relatif terhadap beban. Temuan kami sangat sesuai dengan hasil penelitian Shvarts et al., yang menunjukkan bahwa rasio  $A/A_0$  meningkat secara linier dengan penambahan tekanan.

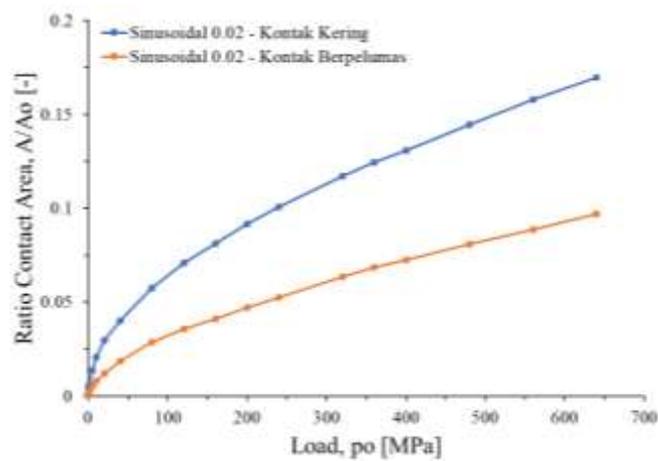


Gambar 3. Perbandingan antara Hasil Studi Saat Ini dengan Model Peneliti Sebelumnya

#### 3.2 Pengaruh Kondisi Pelumasan terhadap Mekanika Kontak

Area kontak adalah komponen penting dalam *surface engineering*. Hal ini berdampak pada sejumlah fenomena, termasuk konduktivitas termal dan listrik, gesekan, dan tekanan kontak [14]. Pada kontak kering, interaksi antara *rigid plate* dan *sinusoidal* dengan kedalaman *cavity* sebesar 0,02 mm menghasilkan rasio area kontak sebesar 0,16978. Namun,

ketika permukaan kontak diberikan pelumas, rasio area kontak menurun menjadi 0,09713. Dari hasil data tersebut menghasilkan perbedaan yang cukup signifikan yaitu 42,79%. Kondisi ini diamati pada tahap akhir kontak, dimana penggunaan pelumas pada tingkat asperitas akan menghasilkan rasio area kontak yang lebih kecil dibandingkan dengan kondisi kontak kering. Temuan ini sejalan dengan penelitian oleh Shvarts et al. yang menunjukkan bahwa area kontak berkurang ketika fluida terperangkap di antara asperitas selama kontak elastis. Gambar 4 di bawah ini menunjukkan pengaruh kondisi pelumasan terhadap *contact area* pada setiap model.

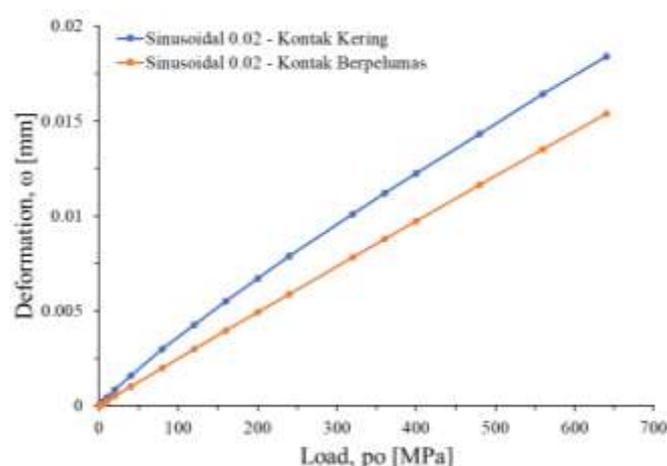


Gambar 4. Pengaruh Variasi Kondisi Pelumasan terhadap *Ratio Contact Area*

### 3.3 Pengaruh Kondisi Pelumasan terhadap Deformasi

Pada semua model, peningkatan beban (*load*) menyebabkan deformasi yang lebih besar. Peningkatan ini terkait dengan meningkatnya *pressure* pada bagian bawah geometri yang mengarah pada peningkatan gaya normal dan akibatnya deformasi semakin besar. Ketika menganalisis perilaku mekanis permukaan kontak, penting untuk mempertimbangkan pengaruh kondisi pelumasan pada deformasi yang dihasilkan. Pada kondisi kering, kontak antara *rigid plate* dan *sinusoidal* dengan kedalaman *cavity* sebesar 0,02 mm menghasilkan deformasi sebesar 0,01841 mm. Namun, ketika permukaan kontak diberikan pelumas, deformasi menurun menjadi 0,01538 mm. Dari hasil kontak permukaan tersebut akan menghasilkan perbedaan nilai deformasi 16,46% antara kontak kering dan kontak berpelumas.

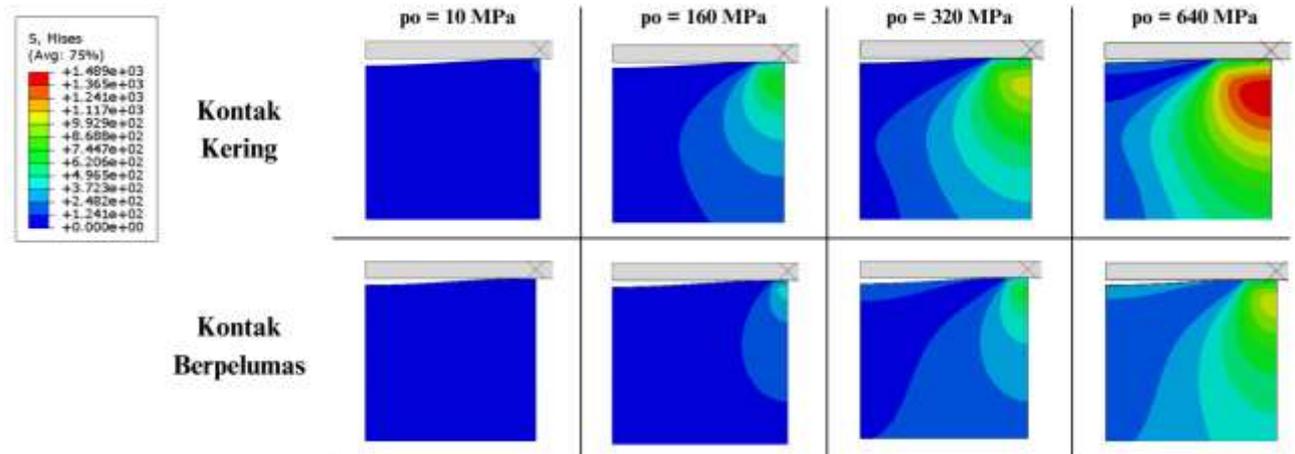
Penggunaan pelumas pada pada tingkat asperitas akan menghasilkan deformasi yang lebih kecil dibandingkan kontak kering. Hasil penelitian ini sejalan dengan temuan dari penelitian serupa yang dilakukan oleh Hua et al. dan Tallian et al. Mereka mengamati bahwa deformasi asperitas berkurang saat kontak terjadi dalam kondisi berpelumas, karena fluida mampu menahan sebagian dari beban yang diterima [15] [16]. Gambar 5 di bawah ini menunjukkan pengaruh kondisi pelumasan terhadap deformasi pada setiap model.



Gambar 5. Pengaruh Variasi Kondisi Pelumasan terhadap Deformasi

### 3.4 Pengaruh Kondisi Pelumasan terhadap Distribusi Tegangan *von Mises*

Gambar 6 di bawah ini menunjukkan distribusi tegangan *von Mises* pada kondisi pelumasan yang berbeda, yaitu kontak kering dan kontak berpelumas. Dapat dilihat bahwa variasi kondisi pelumasan yang diterapkan memberikan perbedaan yang signifikan pada kontur *Von Mises stress*. Hal ini terjadi karena menurut Hua et al. menyatakan bahwa fluida mampu menahan sebagian dari beban yang diterima. Pada akhir kontak mekanis, kontak kering akan menghasilkan tegangan *Von Mises* sebesar 1489 MPa sedangkan kontak berpelumas akan menghasilkan tegangan sebesar 1066 MPa. Hasil penelitian menunjukkan bahwa model pada kontak kering dan kontak berpelumas menunjukkan perbedaan nilai tegangan *Von Mises* yang cukup signifikan yaitu 28,41%. Terlihat pula bahwa ketika model diberikan beban (*load*) yang lebih besar, distribusi tegangan yang terjadi juga semakin luas pada permukaan tersebut.



Gambar 6. Kontur Distribusi Tegangan Von Mises dengan Variasi Kondisi Pelumasan

## 4. Kesimpulan

Penelitian ini menyelidiki pengaruh variasi kondisi pelumasan terhadap tegangan *von Mises*, *contact area*, dan deformasi. Hasil penelitian menunjukkan bahwa perbedaan kondisi pelumasan berpengaruh secara signifikan terhadap parameter-parameter yang dihasilkan. Untuk tegangan *von Mises*, variasi kondisi pelumasan yang diterapkan menghasilkan perbedaan 28,41% antara kontak kering dan kontak berpelumas. Pada akhir kontak mekanis, kontak kering menghasilkan tegangan *Von Mises* sebesar 1489 MPa sedangkan kontak berpelumas menghasilkan tegangan sebesar 1066 MPa. Untuk parameter *contact area* dan deformasi, perbedaan kondisi pelumasan memberikan perbedaan hasil masing-masing 42,79% dan 16,46%. Nilai beban (*load*) yang lebih tinggi menyebabkan distribusi tegangan dan deformasi yang lebih luas pada material. Analisis ini sangat penting bagi para peneliti untuk memahami pengaruh signifikan pelumas dalam kontak mekanik. Dalam konteks penelitian ini, pelumasan tidak hanya memengaruhi tegangan *von Mises*, tetapi juga membantu dalam mendistribusikan beban secara lebih merata, sehingga mengurangi risiko kerusakan material dan deformasi permanen.

## Daftar Pustaka

- [1] K. Kildashti, K. Dong, and A. Yu, "Contact force models for non-spherical particles with different surface properties: A review," *Powder Technol.*, vol. 418, no. December 2022, 2023, doi: 10.1016/j.powtec.2023.118323.
- [2] I. Etsion, "State of the art in laser surface texturing," *Proc. 7th Bienn. Conf. Eng. Syst. Des. Anal. ESDA 2004*, vol. 1, pp. 585–593, 2004, doi: 10.1115/esda2004-58058.
- [3] S. Saha and R. L. Jackson, "Elastic and elastic-perfectly plastic analysis of an axisymmetric sinusoidal surface asperity contact," *Tribol. - Mater. Surfaces Interfaces*, vol. 14, no. 1, pp. 1–21, 2020, doi: 10.1080/17515831.2019.1663396.
- [4] R. L. Jackson and I. Green, "A finite element study of elasto-plastic hemispherical contact against a rigid flat," *J. Tribol.*, vol. 127, no. 2, pp. 343–354, 2005, doi: 10.1115/1.1866166.
- [5] S. Andersson, A. Söderberg, and S. Björklund, "Friction models for sliding dry, boundary and mixed lubricated contacts," *Tribol. Int.*, vol. 40, no. 4, pp. 580–587, 2007, doi: 10.1016/j.triboint.2005.11.014.
- [6] S. Mitrovic, D. Adamovic, F. Zivic, D. Dzunic, and M. Pantic, "Friction and wear behavior of shot peened surfaces of 36CrNiMo4 and 36NiCrMo16 alloyed steels under dry and lubricated contact conditions," *Appl. Surf. Sci.*, vol. 290, pp. 223–232, 2014, doi: 10.1016/j.apsusc.2013.11.050.
- [7] M. Zwicker, J. Spangenberg, P. Martins, and C. V. Nielsen, "Investigation of material strength and oil compressibility on the hydrostatic pressure build-up in metal forming lubricants," *Procedia CIRP*, vol. 115, pp. 78–82, 2022, doi: 10.1016/j.procir.2022.10.053.

- [8] M. Hafis, "PhD Thesis Topics PhD Thesis Topics," no. September, p. 95, 2017.
- [9] A. G. Shvarts and V. A. Yastrebov, "Trapped fluid in contact interface," *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 119, pp. 140–162, 2018, doi: 10.1016/j.jmps.2018.06.016.
- [10] R. B. Martin, D. B. Burr, N. A. Sharkey, and D. P. Fyhrie, *Skeletal Tissue Mechanics*. 2015. doi: 10.1007/978-1-4939-3002-9.
- [11] G. Bayada and L. Chupin, "Compressible fluid model for hydrodynamic lubrication cavitation," *J. Tribol.*, vol. 135, no. 4, pp. 1–13, 2013, doi: 10.1115/1.4024298.
- [12] Hertz, "Hertz's Miscellaneous Papers," *Hertz's Misc. Pap.*, 1896.
- [13] H. M. Westergaard, "1939 Westergaard Bearing Pressure and Cracks.Pdf," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 6, no. 2. pp. 49–53, 1939. [Online]. Available: <https://asmedigitalcollection.asme.org/appliedmechanics/article-abstract/6/2/A49/1101655/Bearing-Pressures-and-Cracks-Bearing-Pressures?redirectedFrom=fulltext>
- [14] M. Kalin, B. Zugelj, M. Lamut, and K. Hamouda, "Elastic and plastic deformation of surface asperities and their load-carrying mechanisms during the formation of a real contact area," *Tribol. Int.*, vol. 178, no. PA, p. 108067, 2023, doi: 10.1016/j.triboint.2022.108067.
- [15] D. Y. Hua, L. Qiu, and H. S. Cheng, "Modeling of lubrication in micro contact," *Tribol. Lett.*, vol. 3, no. 1, pp. 81–86, 1997, doi: 10.1023/A:1019131727427.
- [16] K. L. Johnson, J. A. Greenwood, and S. Y. Poon, "A simple theory of asperity contact in elasto-hydro-dynamic lubrication," *Wear*, vol. 19, no. 1, pp. 91–108, 1972, doi: 10.1016/0043-1648(72)90445-0.