Artikel Penelitian

SOLUSI PERIODIK DARI PERSAMAAN KORTEWEG de VRIES (KdV) DENGAN OPERATOR BILINIER HIROTA

Sri Rubiyanti[1], Sutimin[2]
[1,2]Program Studi Matematika Jurusan Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H, Semarang, 50275

Abstract. Hirota bilinear operator (*Hirota Method*) is proposed to directly construct periodic wave solutions from Korteweg de Vries (KdV) equation. This solution can be expressed in terms of Jacobi Theta 4 (θ_4) functions, with dispersion relation yielded from degradation of biliear equation. Then, sinusoidal wave, Solitary, and Cnoidal can be reduced from this solution to asses certain of *nome (q)*.

Key words: Hirota Bilinear operator, Korteweg de Vries (KdV) equation, periodic

PENDAHULUAN

Berkenaan dengan fenomena gelombang periodik, ada beberapa teori dengan berbagai derajad kekompleksan dan ketelitian untuk menggambarkan gelombang di alam, diantaranya adalah teori Airy, Stokes, Gerstner, Mich, Cnoidal, dan Solitary (Tunggal). Paper ini menggunakan metode Operator Bilinier Hirota yang dapat digunakan mengkonstruksi gelombang periodic. Persamaan yang digunakan adalah persamaan korteweg de Vries (KdV),

$$\partial_t u + \partial_x u + \frac{3}{2} u\, \partial_x u + \frac{1}{6}\partial_x^3 u = 0 \qquad (1.1)$$

Dimana persamaan permukaan gelombang u(x,t), yang didefinisikan sebagai berikut

$$u = u_0 + 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln f(x,t) \qquad (1.2)$$

Pada paper ini digunakan fungsi Jacobi theta θ_4 sebagai pendekatan solusinya. Pada bagian yang lain, dengan operator bilinier Hirota atau juga dikenal dengan metode Hirota dapat diperoleh relasi disperse gelombangnya dan dengan melakukan pendekatan parameter diperoleh profil gelombang khusus seperti gelombang Cnoidal dan Solitary.

Transformasi Persamaan KdV menjadi Operator Bilinier

Untuk mencari solusi periodik dari persamaan Korteweg-de-Vries (KdV) digunakan metode Hirota. Perhatikan persamaan gelombang untuk gelombang air tanpa dimensi yang dimodelkan dengan persamaan (1.1).

Dengan melakukan transformasi variable q_x=u dan mensubstitusikan ke persamaan (3.1) maka diperoleh

$$q_{xt} + q_{xx} + \frac{3}{2}q_x q_{xx} + \frac{1}{6}q_{xxxx} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[q_t + q_x + \frac{3}{4}(q_x)^2 + \frac{1}{6}q_{xxx}\right] = 0$$

(2.1)

Dengan mengintegralkan persamaan (2.1) terhadap x diperoleh

$$q_t + q_x + \frac{3}{4}(q_x)^2 + \frac{1}{6}q_{xxx} + c(t) = 0 \qquad (2.2)$$

dimana c(t) konstanta integrasi.

Perhatikan bahwa persamaan permukaan gelombang u(x,t) seperti pada persamaan (1.2) dan q_x=u sehingga

$$q_x = u_0 + 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln f$$

ISSN 0854-0675
Artikel Penelitian: 111-117

maka, $q = u_0 x + 2\frac{\partial}{\partial x}\ln f + c_1(t)$

$$= u_0 x + 2\frac{f_x}{f} + c_1(t)$$

Sehingga diperoleh

$$q_t = 2\frac{f_{xt}}{f} - 2\frac{f_t f_x}{f^2} + c_1'(t)$$

$$q_x = u_0 + 2\frac{f_{xx}}{f} - 2\frac{(f_x)^2}{f^2}$$

$$(q_x)^2 = u_0^{\,2} + 4\frac{(f_{xx})^2}{f^2} + 4\frac{(f_x)^4}{f^4} + 4u_0\frac{f_{xx}}{f}$$

$$-4u_0\frac{(f_x)^2}{f^2} - 8\frac{f_{xx}(f_x)^2}{f^3}$$

$$q_{xx} = 2\frac{f_{xxx}}{f} - 6\frac{f_x f_{xx}}{f^2} + 4\frac{(f_x)^3}{f^3}$$

$$q_{xxx} = 2\frac{f_{xxxx}}{f} - 8\frac{f_x f_{xxx}}{f^2} - 6\frac{(f_{xx})^2}{f^2} + 24\frac{f_{xx}(f_x)^2}{f^3} - 12\frac{(f_x)^4}{f^4}$$

Substitusikan perhitungan di atas ke persamaan(3.3), diperoleh persamaan dalam bentuk f :

$$\frac{1}{f^2}\left\{\left[2ff_{xt} - 2f_x f_t\right] + \left(\frac{3}{2}u_0 + 1\right)\left[2ff_{xx} - 2(f_x)^2\right]\right.$$

$$+\frac{1}{6}\left[2ff_{xxxx} - 8f_x f_{xxx} + 6(f_{xx})^2\right] + C(t)f^2$$

$$\left.+\left[(f_{xx})^2 - 2\frac{f_{xx}(f_x)^2}{f} + \frac{(f_x)^4}{f^2}\right]\right\} = 0$$

(2.3)

dimana $C(t) = c_1'(t) + u_0 + u_0^{\,2}$.

Secara umum, operator bilinier Hirota (D-operator) untuk *multivariable* didefinisikan sebagai berikut

$$\left[D_x^{m1} D_t^{m2} \ldots\right](f.g) =$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right)^{m1}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'}\right)^{m2} f(x,t,\ldots)\times g(x',t',\ldots)\Bigg|_{x'=x,t'=t,\ldots}$$

Dimana m_i, $i = 1,2,3,\ldots$ integer positif dan *x*, $t,\ldots$ dan $x',t',\ldots$ variable bebas.

Sehingga untuk dua variabel, operator bilinier $D_t^m D_x^n(a.b)$ dapat didefinisikan sebagai

$$D_t^m D_x^n(a(x,t).b(x',t')) =$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'}\right)^{m}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right)^{n} a(x,t).b(x',t')\Bigg|_{\substack{x'=x\\ t'=t}}$$

untuk *m, n* = integer positif. Misal, untuk *m* = *n* = *1* maka

$$D_t D_x(a(x,t).b(x',t')) =$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right) a(x,t).b(x',t')$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'}\right)(a_x b - ab_{x'})$$

$$= a_{xt}b - a_t b_{x'} - a_x b_{t'} + ab_{x't'}$$

Jika $x = x'$, $t = t'$ maka perhitungan tersebut menjadi

$$D_t D_x(a.b) = a_{xt}b + ab_{xt} - a_t b_x - a_x b_t$$

dan jika $a(x,t) = b(x,t)$ untuk setiap *x, t* maka

$$D_t D_x(a.a) = 2a_{xt}a - a_x a_t$$

Dengan cara yang sama, persamaan (2.3) akan menjadi

$$\left(4D_tD_x + (6u_0 + 4)D_x^{\,2} + \frac{2}{3}D_x^{\,4} + C\right)(f.f) + \frac{1}{f^2}\left(D_x^{\,2}(f.f)\right)^2 = 0 \tag{2.4}$$

Dengan adanya notasi ,

$$F(D_x, D_t, C) \equiv 4D_tD_x + (6u_0 + 4)D_x^{\,2} + \frac{2}{3}D_x^{\,4} + C$$

Sehingga persamaan (2.4) dapat ditulis

$$F(D_x, D_t, C)(f.f) + \frac{1}{f^2}\left(D_x^{\,2}(f.f)\right)^2 = 0$$

Dapat juga diartikan

$$\frac{1}{f^2}\left(D_x^{\,2}(f.f)\right)^2 = 0 \Leftrightarrow D_x^{\,2}(f.f) = 0$$

(2.5a)

$$F(D_x, D_t, C)(f.f) = 0$$

(2.5b)

Relasi Dispersi dari Gelombang Periodik

Selanjutnya untuk mencari relasi dispersi gelombang cnoidal dari persamaan Korteweg-de-Vries (KdV) dengan pendekatan solusi fungsi Jacobi theta θ_4 yang dinyatakan oleh

$$f(x,t) = \theta_4(z,q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2} e^{2inz\pi}$$

dimana variable fase z = kx + ωt dan parameter q dikatakan *nome* dari fungsi θ_4, $q = e^{i\pi\tau}$ sehingga

$$f(x,t) = \theta_4(z,q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n \exp\left\{2inz\pi + \pi i n^2\tau\right\}$$

(3.1)

dengan, $|q| < 1$

τ : parameter konstan kompleks yang memenuhi Im τ > 0

p : berkenaan dengan bilangan gelombang

ω : berkenaan frekuensi/kecepatan

Berkenaan dengan persamaan bilinier, terdapat sifat operator D

$$D_x^n \exp(\mu x).\exp(\mu' x) = (\mu - \mu')^n \exp\{(\mu + \mu')x\}$$

Atau

$$F(D_xD_t)\exp(\mu x + \omega t)\exp(\mu' x + \omega' t) = F(\mu - \mu', \omega - \omega')\exp\{(\mu + \mu')x + (\omega + \omega')t\}$$

Karena paper ini menggunakan pendekatan fungsi Jacobi theta θ_4 maka dengan mengaplikasikan sifat operator D dan mensubstitusikan persamaan (3.1) ke persamaan (2.5b) akan diperoleh

$$F(D_x, D_t, C)\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n \exp\left\{2inz\pi + \pi i n^2\tau\right\}.$$

$$\sum_{n'=-\infty}^{\infty}(-1)^{n'} \exp\left\{2in'z\pi + \pi i n'^2\tau\right\} = 0$$

$$\sum_{n,n'=-\infty}^{\infty}(-1)^{n+n'} F(D_x, D_t, C)\exp\left\{2inz\pi + \pi i n^2\tau\right\}.$$

$$\exp\left\{2in'z\pi + \pi i n'^2\tau\right\} = 0$$

Misalkan m' = m – n, maka

$$\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}(-1)^m F(D_x, D_t, C)\exp\left\{2inz\pi + \pi i n^2\tau\right\}.$$

$$\exp\{2i(m-n)z\pi + \pi i(m-n)^2\tau\} = 0$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\{2i(n-(m-n))k\pi, 2i(n-(m-n))\omega\pi, C\}$$

$$\exp\{2imz\pi + \pi i(n^2+(m-n)^2)\tau\} = 0$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m \widetilde{F}(m)\exp(2imz\pi) = 0$$

Dimana

$$\widetilde{F}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\{2i(2n-m)k\pi, 2i(2n-m)\omega\pi, C\}$$

$$\exp\{\pi i(n^2+(m-n)^2)\tau\}$$

$$\overset{n=m'+1}{=} \sum_{m'=-\infty}^{\infty} F\{2i(2m'-(m-2))k\pi, 2i(2m'-(m-2))\omega\pi, C\}$$

$$\exp\{\pi i((m'+1)^2 + (m-(m'+1))^2)\tau\}$$
$$= \widetilde{F}(m-2)\exp(2\pi i(m-1)\tau)$$

(3.2)

Dengan mensubstitusikan nilai m dengan suatu bilangan pada persamaan (3.2) diperoleh

$$\widetilde{F}(m) = \widetilde{F}(-m)$$

dan

$$\widetilde{F}(m) = \begin{cases} \widetilde{F}(0)\exp\left(i\pi\frac{1}{2}m^2\tau\right) & \text{, untuk m genap} \\ \widetilde{F}(1)\exp\left(i\pi\frac{1}{2}(m^2-1)\tau\right) & \text{, untuk m ganjil} \end{cases} \tag{3.3}$$

Dari persamaan (3.3), tampak bahwa jika $\widetilde{F}(0) = 0$ dan $\widetilde{F}(1) = 0$ mengakibatkan $\widetilde{F}(m) = 0$ untuk semua $m = 1,2,3,\ldots$. Sehingga dapat dicari konstanta integrasi C dan relasi dispersi ω yang memenuhi $\widetilde{F}(0) = 0$ dan $\widetilde{F}(1) = 0$, untuk mendapatkan solusi periodik dari persamaan KdV. Akan diperoleh hubungan

Untuk m = 0,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(-4\pi^2(4n)^2k\omega + \frac{2}{3}\pi^4(4n)^4k^4 + C\right)\exp\{\pi i(2n^2)\tau\} = 0 \tag{3.4}$$

Untuk m = 1,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(-4\pi^2(4n-2)^2k\omega + \frac{2}{3}\pi^4(4n-2)^4k^4 + C\right)\exp\{\pi i(n^2+(1-n)^2)\tau\} = 0 \tag{3.5}$$

Misalkan dinotasikan

$$A_0(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\{2\pi i n^2\tau\}$$
$$A_1(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(4n)^2\exp\{2\pi i n^2\tau\}$$
$$A_2(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(4n)^4\exp\{2\pi i n^2\tau\}$$

Dan

$$B_0(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\{\pi i(n^2+(1-n)^2)\tau\}$$
$$B_1(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(4n-2)^2\exp\{\pi i(n^2+(1-n)^2)\tau\}$$
$$B_2(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(4n-2)^4\exp\{\pi i(n^2+(1-n)^2)\tau\}$$

Dengan mensubstitusikan notasi tersebut ke dalam persamaan (3.3) dan (3.4), akan diperoleh

$$-4\pi^2 A_1(\tau)k\varpi + \frac{2}{3}\pi^4 A_2(\tau)k^4 + CA_0(\tau) = 0 \qquad (3.5a)$$

$$-4\pi^2 B_1(\tau)k\varpi + \frac{2}{3}\pi^4 B_2(\tau)k^4 + CB_0(\tau) = 0 \qquad (3.5b)$$

Dari persamaan (3.5a) diperoleh hubungan

$$C = \frac{4\pi^2 A_1(\tau)k\omega}{A_0(\tau)} - \frac{2}{3}\frac{\pi^4 A_2(\tau)k^4}{A_0(\tau)} \qquad (3.6)$$

Substitusikan persamaan (3.5b) ke persamaan (3.6), sehingga

$$4\pi^2\left(B_0(\tau)\frac{A_1(\tau)}{A_0(\tau)} - B_1(\tau)\right)k\varpi + \frac{2}{3}\pi^4\left(B_2(\tau) - B_0(\tau)\frac{A_2(\tau)}{A_0(\tau}\right)k^4 = 0 \qquad (3.7)$$

Dengan mengalikan $A_0(\tau)/\pi^2 k$ pada persamaan (3.16), akan diperoleh

$$4\left(A_1(\tau)B_0(\tau) - A_0(\tau)B_1(\tau)\right)\varpi + \frac{2}{3}\pi^2\left(A_0(\tau)B_2(\tau) - A_2(\tau)B_0(\tau)\right)k^3 = 0$$

Sehingga akan diperoleh

$$\varpi = \frac{1}{6}\pi^2 k^3 \frac{\left(A_2(\tau)B_0(\tau) - A_0(\tau)B_2(\tau)\right)}{\left(A_1(\tau)B_0(\tau) - A_0(\tau)B_1(\tau)\right)} \qquad (3.8)$$

Persamaan di atas dikenal sebagai relasi dispersi untuk gelombang periodik.

Konstruksi Gelombang Periodik dengan pendekatan Jacobi Theta θ_4

Dengan menggunakan pendekatan solusi fungsi Jacobi theta θ_4 dan permukaan gelombang u(x,t), $u = u_0 + 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln f$, selanjutnya kita akan mengkonstruksi gelombang periodik

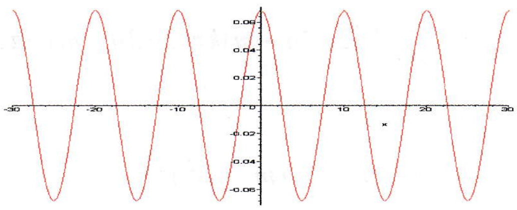
Untuk memudahkan perhitungan, fungsi f pada (3.1) dapat ditulis sebagai berikut

$$f = 1 - q\left(e^{2iz\pi} + e^{-2iz\pi}\right) + q^4\left(e^{4iz\pi} + e^{-4iz\pi}\right) - \ldots$$

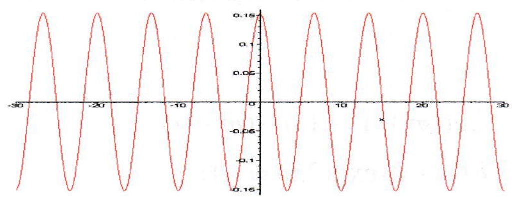
Dengan hanya mengambil dua suku terdepan

$$f = 1 - q\left(e^{2iz\pi} + e^{-2iz\pi}\right)$$

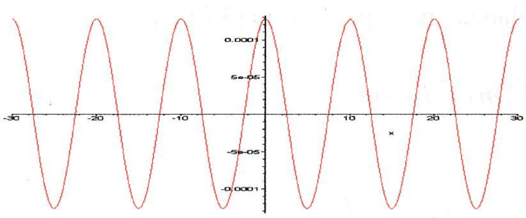
Diperoleh solusi seperti pada gambar dibawah ini.



a) k=0.1 dan τ=i

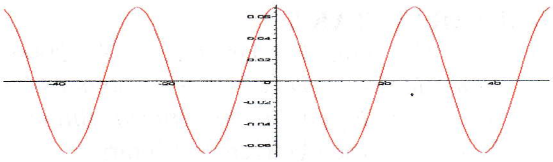


b) k=0.15 dan τ=i

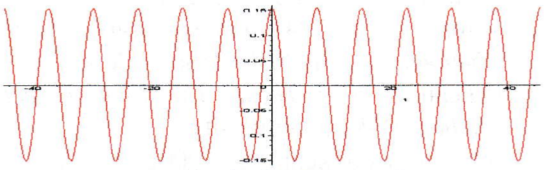


c) k=0.1 dan τ=3i

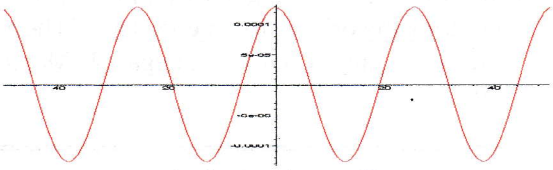
Gambar .1a. bentuk gelombang satu periodik dari persamaan KdV sepanjang sb-x, untuk τ imajiner murni



a) k=0.1 dan τ=i

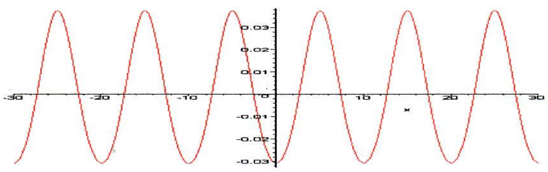


b) k=0.15 dan τ=i

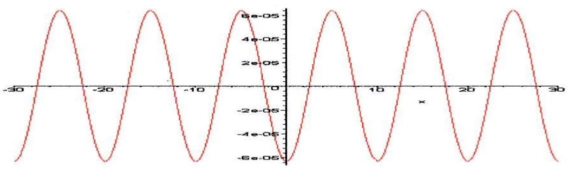


c) k=0.1 dan τ=3i

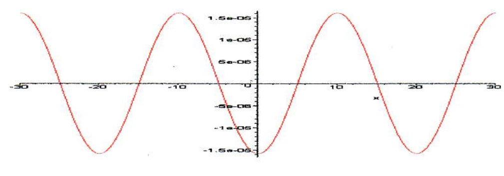
Gambar .1b. bentuk gelombang satu periodik dari persamaan KdV sepanjang sb-t, untuk τ imajiner murni



a) k=0.1 dan τ=5+I



b) k=0.1dan τ=5+3I

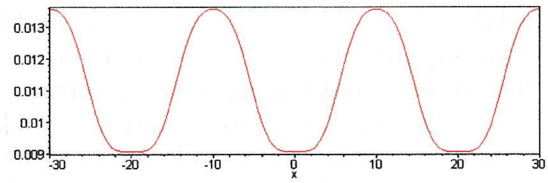


c) k=0.05 dan τ=5+3I

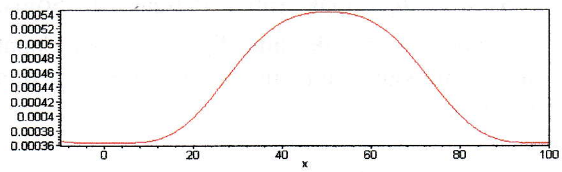
d)

Gambar .2. profil gelombang periodik dari persamaan KdV sepanjang sb-x, untuk τ kompleks

Selanjutnya jika pendekatan f diambil untuk n positif dan dua suku terdepannya maka akan dihasilkan profil gelombang cnoidal dan untuk nilai k $\rightarrow$ 0 dengan k bilangan riil, bentuk gelombang mendekati gelombang solitary. Seperti terlihat pada gambar 4.3.



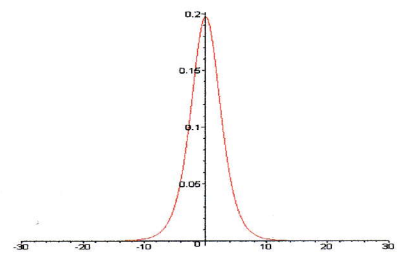
a) k=0.1 dan τ=7+0.7I



b) k=0.02 dan τ=7+0.7I

Gambar 3. profil gelombang cnoidal dari persamaan KdV sepanjang sb-x

selanjutnya dengan $\varpi \rightarrow \frac{2}{3}\pi^2 k^3$, saat q $\rightarrow$ 0 akan diperoleh profil gelombang seperti gambar 4.4.



gambar 4 gelombang yang terjadi saat q $\rightarrow$ 0, k=0.1 dan τ=I

SIMPULAN

Penggambaran solusi gelombang periodik dari KdV dapat dengan menggunakan pendekatan fungsi Jacobi theta (θ_4). Dengan menggunakan operator bilinier Hirota (metode Hirota), relasi dispersi gelombang dari solusi persamaan Korteweg de Vries (KdV) dapat diperoleh dengan mentransformasi persamaan KdV menjadi bentuk bilinier teerlebih dahulu. Variasi nilai k maupun τ dapat mempengaruhi bentuk gelombang periodik yang diperoleh sedangkan variable waktu (t) tidak mempengaruhi besarnya kecepatan (ω), hal ini dapat dilihat dari persamaan relasi dispersinya.

Berdasarkan hasil analisa pada persamaan KdV, dapat diketahui adanya fenomena alam tentang gelombang Cnoidal dan Soliton yang dapat dikaji lebih lanjut untuk konstanta u_0 tidak sama dengan 0. Solusi gelombang periodik yang diperoleh juga dapat dikembangkan lagi untuk gelombang dua periodik

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Dai, H., Fan, E. dan Geng, X. 2006. *Constructing Periodic Wave Solutions of Nonlinear Equations by Hirota Bilinear Method.* Cornell University Library. http://www.arxiv.org/abs/nlin/0602015v.pdf (diakses tanggal 27 Mei 2010)

[2]. Hirose, Akira. 1941. *Introduction to Wave Phenomena.* John Wiley&Sons, Amerika

[3]. Pekcan, A. 2005. *Thesis: The Hirota Direct Method.* Bilkent University http://thesis.bilkent.edu.tr/0002895.pdf (diakses tanggal 4 Maret 2010)

[4]. Weisstein, Eric W. *Jacobi Theta Functios.* http://mathworld.wolfram.com/JacobiThetaFunctions.html (diakses tanggal 4 Maret 2010)