Jurnal Sains & Matematika (JSM)
Volume 18 Nomor 1, Januari 2010

ISSN 0854-0675
Artikel Penelitian : 7-12

MODEL PERTUMBUHAN LOGISTIK *PREDATOR* DAN *PREY* PADA POPULASI *PREY* DAN SOLUSI KESETIMBANGAN

Sunarsih[1] dan Firsty Nur Hidayati[2]
[1,2]Program Studi Matematika F.MIPA Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang

ABSTRACT *—A predator-prey model with logistic growth in the prey population is an interaction between a predator and a prey population with logistic growth in the prey population. The equations in this model are non linear differential equation with two dependent variables. In this system,* $H(t)$ *is size of prey population at time* t *and* $P(t)$ *is size of predator population at time* t*. This model have three equilibria.*

Key words : logistic, predator and prey, equilibrium point

PENDAHULUAN

Jumlah populasi suatu spesies dipengaruhi oleh adanya interaksi dengan populasi suatu spesies yang lain. Pada interaksi antara populasi *predator* dan *prey*, pemangsa (*predator*) memakan mangsa (*prey*) sehingga berpengaruh negatif pada pertumbuhan potensial populasi *prey* dan positif pada pertumbuhan populasi *predator* [4].

Populasi memiliki pola-pola pertambahan khas yang disebut sebagai bentuk pertumbuhan populasi. Apabila lingkungan tidak terbatas (ruangan, makanan, organisme-organisme lain tidak melakukan pengaruh yang membatasi) maka populasi suatu spesies akan meningkat secara tidak terbatas yang disebut sebagai model pertumbuhan eksponensial. Selain model pertumbuhan eksponensial, dikenal juga model pertumbuhan logistik. Model pertumbuhan logistik merupakan model pertumbuhan populasi dengan kapasitas daya tampung (*carrying capacity*) [2]. Daya tampung (*carrying capacity*) merupakan batas teratas dari pertumbuhan suatu populasi, dimana jumlah populasi itu tidak lagi dapat didukung oleh sarana, sumber daya, dan lingkungan yang ada [5].

Dalam paper ini akan dibahas model pertumbuhan logistic *predator* dan *prey* pada populasi *prey* dan solusi kestabilan.

Model Pertumbuhan Logistik

Dengan menggunakan kaidah logistik (*logistic law*) bahwa persediaan logistik ada batasnya, model pertumbuhan logistik mengasumsikan pada masa tertentu jumlah populasi akan mendekati titik kesetimbangan (*equilibrium*). Pada titik ini jumlah kelahiran dan kematian dianggap sama, sehingga grafiknya akan mendekati konstan (*zero growth*).

Misalkan populasi sutu species mengalami pertumbuhan alami dengan mengikuti persamaan logistik, dengan N menunjukkan banyaknya populasi, K menunjukkan *carrying capacity* dan $\bar{a}$ merupakan laju pertumbuhan intrinsik (*intrinsic growth rate*) yaitu nilai yang menggambarkan daya tumbuh suatu populasi [1]. Diasumsikan $\bar{a} > 0$, mengingat setiap populasi memiliki potensi untuk berkembang. Model pertumbuhan logistik dinyatakan dengan persamaan sebagai berikut :

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = \bar{a} - \frac{\bar{a}}{K}N$$

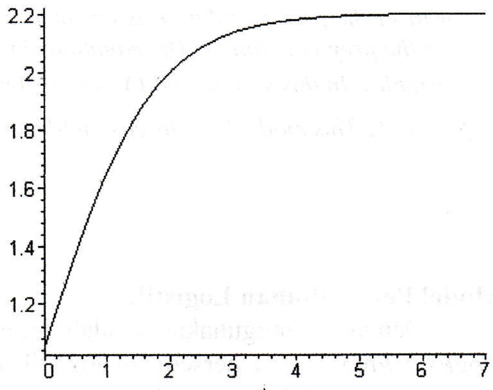
atau

$$\frac{dN}{dt} = \bar{a}N\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

Selanjutnya dengan menggunakan syarat awal $N(0) = N_0$ diperoleh solusi khusus persamaan (1) yaitu

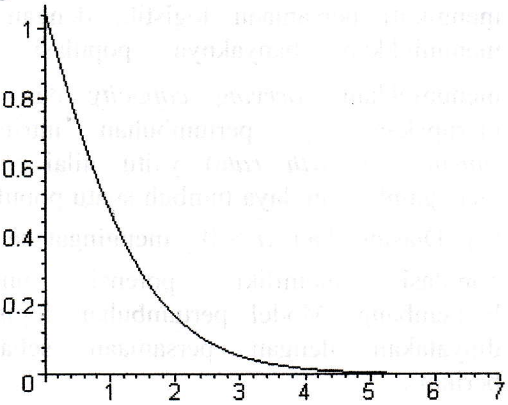
$$N(t) = \frac{K}{\left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-\bar{a}t} + 1}$$

Untuk $\bar{a} > 0$ berlaku $\lim_{t \to \infty} N(t) = K$, sehingga grafik dari solusi khusus persamaan (1) mempunyai asimtot mendatar $N(t) = K$ dan dapat digambarkan sebagai berikut [6].



Gambar 1.
Grafik pertumbuhan logistik untuk $\bar{a} > 0$

Sedangkan untuk $\bar{a} < 0$ berlaku $\lim_{t \to \infty} N(t) = 0$, sehingga solusi khusus persamaan (1) dapat digambarkan dengan grafik berikut.



Gambar 2.
Grafik pertumbuhan logistik untuk $\bar{a} < 0$

Model *Predator* dan *Prey* dengan Pertumbuhan Logistik pada Populasi *Prey*

Interaksi dua populasi yaitu *predator* dan *prey* merupakan suatu interaksi yang menghasilkan atau mengakibatkan pengaruh negatif terhadap pertumbuhan populasi *prey*. Apabila tidak ada *predator* dan lingkungan tidak terbatas (ruangan, makanan, organisme-organisme lain tidak melakukan pengaruh yang membatasi), populasi *prey* akan meningkat dengan laju perubahan populasi sebanding dengan laju pertumbuhan intrinsik dikalikan jumlah populasi yang ada yang disebut sebagai model pertumbuhan eksponensial dan dapat dituliskan dalam persamaan

$$\frac{dH}{dt} = rH \ ,r > 0 \tag{2}$$

Dengan H menunjukkan jumlah populasi prey, r menunjukkan laju pertumbuhan intrinstik populasi *prey* dan t adalah waktu. Jika diasumsikan untuk *predator* dimana tidak ada *prey* dan *prey* tersebut merupakan satu-satunya makanan bagi *predator* maka populasi *predator* akan mengalami penurunan. Hal ini dapat dituliskan dalam persamaan

$$\frac{dP}{dt} = -cP \ ,c > 0 \tag{3}$$

dengan,
P : jumlah populasi *predator*
c : laju kematian populasi *predator*

Keberadaan *predator* akan menyebabkan berkurangnya jumlah populasi *prey*, sehingga persamaan (2) menjadi

$$\frac{dH}{dt} = rH - aPH \ \ ,a > 0 \tag{4}$$

dengan, $a =$ *rasio* pemangsaan (jumlah *prey* yang dibutuhkan untuk mempertahankan populasi *predator* tiap unit waktu). Keberadaan *prey* akan menyebabkan pertambahan jumlah populasi *predator*, sehingga persamaan (3) menjadi

$$\frac{dP}{dt} = kaHP - cP \ \ ,k > 0 \tag{5}$$

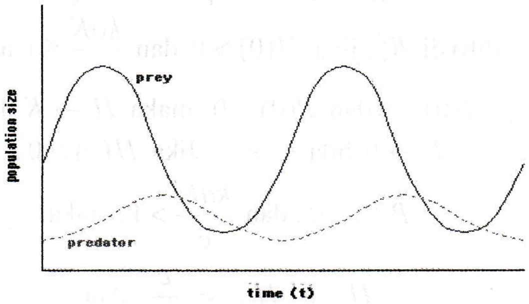
dengan,
k =efisiensi pemberian makanan dari pemangsaan untuk pembentukan *predator* yang baru.

Dari persamaan (4) dan (5) diperoleh suatu sistem persamaan yang merupakan interaksi antara populasi *predator* dan *prey*, yaitu

$$\frac{dH}{dt} = rH - aPH \quad (6a)$$

$$\frac{dP}{dt} = kaHP - cP \quad (6b)$$

Pada interaksi dua populasi tersebut, diasumsikan bahwa populasi *prey* dan *predator* berada pada daerah tertutup yaitu tidak ada migrasi. Pada persamaan (6a), aPH menyatakan laju pemangsaan. Jika jumlah populasi *predator* meningkat maka laju pemangsaan akan meningkat yang mengakibatkan menurunnya jumlah populasi *prey*. Sedangkan jika laju pemangsaan menurun maka jumlah populasi *prey* mengalami peningkatan. Gambar 3 menunjukkan perkiraan jumlah populasi *predator* dan *prey* dengan adanya interaksi yang terjadi.[7]



Gambar 3.
Jumlah populasi *predator* dan *prey* pada waktu t

Pada interaksi dua populasi tersebut, diasumsikan bahwa populasi *prey* dan *predator* berada pada daerah tertutup yaitu tidak ada migrasi. Selanjutnya, untuk *prey* jika jumlah populasinya tidak dapat lagi didukung oleh sarana, sumber daya, dan lingkungan yang ada maka jumlah populasinya mendekati kapasitas daya tampung (*carrying capacity*). Dengan demikian, persamaan (2) dapat dituliskan dalam persamaan

$$\frac{dH}{dt} = \left[r\left(1 - \frac{H}{K}\right)\right] H \quad (7)$$

dengan,

$K =$ kapasitas daya tampung (*carrying capacity*) populasi *prey*

Keberadaan *predator* menyebakan berkurangnya jumlah populasi *prey*, sehingga persamaan (7) menjadi

$$\frac{dH}{dt} = rH\left(1 - \frac{H}{K}\right) - aPH \quad (8)$$

Dari persamaan (8) dan (5) diperoleh suatu sistem persamaan yang merupakan interaksi antara populasi *predator* dan *prey* dengan pertumbuhan logistik pada populasi *prey* sebagai berikut [2].

$$\frac{dH}{dt} = rH\left(1 - \frac{H}{K}\right) - aPH \quad (9a)$$

$$\frac{dP}{dt} = kaHP - cP \quad (9b)$$

Pada persamaan (9a) dan (9b), laju pemangsaan adalah aHP dan efisiensi pemberian makanan dari pemangsaan untuk pembentukan *predator* yang baru adalah k, sehingga laju kelahiran dari populasi *predator* yang baru adalah $kaHP$. $\frac{1}{c}$ adalah rata-rata waktu hidup dari *predator* sehingga $\frac{kaH}{c}$ adalah rata-rata jumlah populasi *prey* yang dirubah menjadi biomass *predator* dalam rentang hidup *predator*. Oleh karena itu, *predator* akan menjadi punah jika gagal pada waktu hidupnya untuk merubah dirinya secara sempurna pada tingkat makanan maksimum K yaitu $\frac{kaK}{c} \le 1$.

Solusi Kesetimbangan Model *Predator* dan *Prey* dengan Pertumbuhan Logistik pada Populasi *Prey*

Misalkan (H^*, P^*) adalah solusi kesetimbangan dari persamaan (9a) dan (9b). Solusi kesetimbangan akan terpenuhi jika $\frac{dH}{dt} = 0$ dan $\frac{dP}{dt} = 0$. Maka dari persamaan (9a) :

$$\left[r\left(1 - \frac{H^*}{K}\right) - aP^* \right] H^* = 0$$

$\Leftrightarrow H^* = 0$ atau

$$r\left(1 - \frac{H^*}{K}\right) - aP^* = 0$$

dan dari persamaan (9b) :

$$(kaH^* - c)P^* = 0$$

$$\Leftrightarrow P^* = 0 \text{ atau } kaH^* - c = 0$$

$$kaH^* = c$$

$$H^* = \frac{c}{ka}$$

Pada persamaan (9a)

diperoleh $r\left(1 - \frac{H^*}{K}\right) - aP^* = 0$,

untuk $P^* = 0$ diperoleh

$$r\left(1 - \frac{H^*}{K}\right) = 0$$

$$1 - \frac{H^*}{K} = 0$$

$$H^* = K$$

dan untuk $H^* = \frac{c}{ka}$ diperoleh :

$$r\left(1 - \frac{\frac{c}{ka}}{K}\right) - aP^* = 0$$

$$aP^* = r\left(1 - \frac{c}{kaK}\right)$$

$$P^* = \frac{r}{a}\left(1 - \frac{c}{kaK}\right)$$

sehingga terdapat 3 solusi kesetimbangan, yaitu:

1. $E_0 = (0,0)$

   Solusi kesetimbangan ini menunjukkan bahwa *prey* dan *predator* menjadi punah karena interaksi yang terjadi.

2. $E_1 = (K,0)$

   Solusi kesetimbangan ini menunjukkan kepunahan pada *predator* dan jumlah populasi *prey* yang meningkat, mendekati kapasitas daya tampung (*carrying capacity*). Pada titik kesetimbangan ini, $\frac{kaK}{c} \le 1$ karena *predator* tidak dapat bertahan hidup dan jumlah populasi *prey* meningkat, mendekati kapasitas daya tampung (*carrying capacity*) tanpa adanya *predator* yang merupakan pemangsa *prey*.

3. $E_2 = \left(\frac{c}{ka}, \frac{r}{a}\left(1 - \frac{c}{kaK}\right)\right)$

   Solusi kesetimbangan ini menunjukkan *prey* dan *predator* tetap bertahan hidup dalam interaksi yang terjadi. Pada titik kesetimbangan ini, $\frac{kaK}{c} > 1$ karena *predator* tetap bertahan hidup.

Lemma

Untuk solusi dari persamaan (9a) dan (9b) di R_+^2, jika $H(0) > 0$ dan $\frac{kaK}{c} \le 1$ atau $H(0) > 0$ dan $P(0) = 0$, maka $H \to K$ dan $P \to 0$ bila $t \to \infty$. Jika $H(0) > 0$, $P(0) > 0$, dan $\frac{kaK}{c} > 1$, maka

$$H \to H_E = \frac{c}{ka} \text{ dan}$$

$$P \to P_E = \frac{r}{a}\left(1 - \frac{c}{kaK}\right) \text{ bila } t \to \infty.$$

Bukti :

Solusi persamaan (9a) dan (9b) berada di R_+^2, dengan $R_+^2 = \{(H,P) \in R^2 | H \ge 0, P \ge 0\}$. Diketahui $H(0) > 0$ dan $\frac{kaK}{c} \le 1$ atau $H(0) > 0$ dan $P(0) = 0$, akan ditunjukkan $H \to K$ dan $P \to 0$ bila $t \to \infty$.

Diketahui $H(0) > 0$ yang berarti jumlah populasi *prey* pada saat $t = 0$ adalah lebih besar dari nol (terdapat populasi *prey*), $\frac{kaK}{c} \le 1$ berarti *predator* akan menjadi punah karena gagal pada waktu hidupnya untuk merubah dirinya secara sempurna pada tingkat makanan maksimum K, dan $P(0)=0$ berarti jumlah populasi *predator* pada saat $t=0$ adalah nol (tidak ada populasi *predator*).

Solusi kesetimbangan pada persamaan (9a) dan (9b) adalah (0,0), $(K,0)$, dan $\left(\frac{c}{ka},\frac{r}{a}\left(1-\frac{c}{kaK}\right)\right)$. Karena $\frac{kaK}{c}\leq 1$ (*predator* akan menjadi punah bila $t\rightarrow\infty$) maka jumlah populasi *prey* meningkat, mendekati kapasitas daya tampung (*carrying capacity*) K bila $t\rightarrow\infty$ dan solusi kesetimbangan yang memenuhi adalah $(K,0)$. Demikian pula jika $H(0)>0$ dan $P(0)=0$, karena populasi *predator* tidak ada (tidak ada *predator* yang memangsa *prey*) maka jumlah populasi *prey* meningkat, mendekati kapasitas daya tampung (*carrying capacity*) K, sehingga solusi kesetimbangan yang memenuhi adalah $(K,0)$. Dengan demikian terbukti bahwa jika $H(0)>0$ dan $\frac{kaK}{c}\leq 1$ atau $H(0)>0$ dan $P(0)=0$ maka pada waktu tak terhingga ($t\rightarrow\infty$), $H\rightarrow K$ dan $P\rightarrow 0$.

Selanjutnya diketahui $H(0)>0$, $P(0)>0$, dan $\frac{kaK}{c}>1$, akan ditunjukkan

$H\rightarrow H_E=\frac{c}{ka}$ dan

$P\rightarrow P_E=\frac{r}{a}\left(1-\frac{c}{kaK}\right)$ bila $t\rightarrow\infty$.

Diketahui $H(0)>0$ yang berarti jumlah populasi *prey* pada saat $t=0$ adalah lebih besar dari nol (terdapat populasi *prey*), $P(0)>0$ berarti jumlah populasi *predator* pada saat $t=0$ adalah lebih besar dari nol (terdapat populasi *predator*), dan $\frac{kaK}{c}>1$ yang berarti *predator* akan tetap bertahan hidup. Solusi kesetimbangan pada persamaan (9a) dan (9b) adalah (0,0), $(K,0)$, dan $\left(\frac{c}{ka},\frac{r}{a}\left(1-\frac{c}{kaK}\right)\right)$. Karena $\frac{kaK}{c}>1$ (*predator* akan bertahan hidup) maka solusi yang memenuhi adalah $\left(\frac{c}{ka},\frac{r}{a}\left(1-\frac{c}{kaK}\right)\right)$ dimana *predator* dan *prey* akan tetap bertahan hidup. Dengan demikian terbukti bahwa jika $H(0)>0$ dan $P(0)>0$, dan $\frac{kaK}{c}>1$ maka pada waktu tak terhingga ($t\rightarrow\infty$), $H\rightarrow H_E=\frac{c}{ka}$ dan $P\rightarrow P_E=\frac{r}{a}\left(1-\frac{c}{kaK}\right)$.

PENUTUP

Model *predator* dan *prey* dengan pertumbuhan logistik pada populasi *prey* merupakan sistem persamaan differensial non linier. Pada sistem persamaan tersebut terdapat dua variabel tidak bebas yaitu $H(t)$ yang menyatakan jumlah populasi *prey* pada waktu t dan $P(t)$ yang menyatakan jumlah populasi *predator* pada waktu t. Dari sistem tersebut dicari solusi kesetimbangan sehingga diperoleh tiga titik kesetimbangan yaitu

$E_0=(0,0)$, $E_1=(K,0)$ dan $E_2=\left(\frac{c}{ka},\frac{r}{a}\left(1-\frac{c}{kaK}\right)\right)$.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Asep K. Septriatna & Meiyane Lestari. Pengaruh Ambang Batas Kepunahan dalam Penentuan Tingkat Eksploitasi Sumber Alam Renegeratif, 2009. Matematica et Natura Acta 1 (1) : 1-8.

[2]. Eugene, P. O. 1993. *Dasar-Dasar Ekologi edisi ketiga*. Yogyakarta: Gajah Mada University Press.

[3]. Hethcote, H. W, Wendy Wang, Litao Han, and Zhien Ma. 2004. A Predator-Prey Model with Infected Prey. *Journal of Theoretical Population Biology*. 66 (September 13): 259-268. http://www.elseiver.com/locate/ytpbi. (accessed November 12, 2009).

[4]. McNaughton, S. J and Larry L Wolf. 1990. *Ekologi Umum*. Yogyakarta: Gajah Mada University Press.

[5]. Nanik, H. S, Hendarko Sugondo, Erry Wiryani, dan Mochammad Hadi. 2002. *Ekologi*. Semarang: Laboratorium Ekologi dan Biosistematika Jurusan Biologi FMIPA UNDIP

[6]. Purnomo, K.D., Model Pertumbuhan Populasi dengan Memodifikasi Model Pertumbuhan Logistik. Majalah Matematika dan Satistika , 2009, Vol 11 No. 1 :

[7]. *Predator-PreyDynamics:Lotka-Volterra*. http://www.tiem.utk.edu/bioed/bealsmodules/predator-prey.html. (diakses 26 Maret 2010).