Jurnal Sains & Matematika (JSM)
Volume 18, Nomor 2 April 2010

ISSN 0854-0675
Artikel Penelitian: 37-48

BCK-ALJABAR HIPER

Dewi Yunitasari dan Suryoto
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP Jl. Prof. H. Soedarto, S.H, Semarang 50275

ABSTRAK---Suatu BCK-aljabar hiper dapat dipandang sebagai BCK-aljabar dimana peran operasi biner yang berlaku pada BCK-aljabar diambil alih oleh operasi hiper yang berlaku pada BCK-aljabar hiper. Kemudian karena operasi hiper merupakan pemetaan dari himpunan ke keluarga himpunan sehingga operasi hiper yang berlaku pada BCK-aljabar hiper merupakan perumuman dari operasi biner yang berlaku pada BCK-aljabar. Karena BCK-aljabar hiper dapat dipandang sebagai BCK-aljabar sehingga sifat-sifat yang berlaku pada BCK-aljabar juga berlaku pada BCK-aljabar hiper. Dengan menggunakan sifat-sifat yang berlaku pada BCK-aljabar, akan dibuktikan sifat-sifat yang berlaku pada BCK-aljabar hiper. Kemudian diberikan juga relasi yang lebih khusus yang berlaku pada BCK-aljabar hiper yang dinamakan relasi hiper.

Kata kunci : BCK-aljabar, BCK-aljabar hiper, operasi hiper, relasi hiper.

ABSTRACT---*A hyper BCK-algebra can be viewed as BCK-algebra in which the binary operation applied to the BCK-algebra has been replaced by hyper operation applied to the hyper BCK-algebra. Since hyper operation is a mapping from set to family of set so that the hyper operation applied to the hyper BCK-algebra is a generalization of binary operation applied to BCK-algebra. Because hyper BCK-algebra can be viewed as BCK-algebra so that the characteristic applied to the BCK-algebra is also applicable to the hyper BCK-algebra. Using the characteristic applied to the BCK-algebra, then the characteristic applied to the hyper BCK-algebra will be proven. More specific relations applied to BCK-algebra which is called hyper relation will also be given.*

Keywords *: BCK-algebra, hyper BCK-algebra, hyper operation, hyper relation.*

1. PENDAHULUAN

Suatu struktur aljabar merupakan himpunan yang tidak kosong dengan paling sedikit sebuah relasi ekuivalensi, satu atau lebih operasi biner dan memenuhi aksioma–aksioma tertentu.

Selain grup dan ring yang merupakan struktur aljabar, K-aljabar juga merupakan suatu struktur aljabar. Berdasarkan grup pembangunnya, K-aljabar mempunyai beberapa kelas yaitu BCH-aljabar, BCI-aljabar, BCK-aljabar jika grup pembangun K-aljabar grup komutatif dan B-aljabar jika grup pembangun K-aljabar grup tidak komutatif.

Disamping itu, terdapat juga suatu struktur aljabar baru yang lain yang disebut dengan BCK-aljabar hiper.

Kemudian BCK-aljabar hiper dapat dipandang sebagai BCK-aljabar dimana peran operasi biner yang berlaku pada BCK-aljabar diambil alih oleh operasi hiper yang berlaku pada BCK-aljabar hiper. Seperti halnya BCK-aljabar yang memiliki relasi yang berlaku di dalamnya, BCK-aljabar hiper yang dapat dipandang sebagai BCK-aljabar juga memiliki relasi yang berlaku di dalamnya. Salah satu relasi yang berlaku pada BCK-aljabar hiper dinamakan sebagai relasi hiper.

Himpunan yang digunakan dalam BCK-aljabar hiper adalah himpunan yang berhingga.

2. BCK-ALJABAR HIPER

Pada bagian ini akan dibahas mengenai BCK-Aljabar Hiper dan Relasi Hiper pada BCK-Aljabar Hiper

2.1 BCK-Aljabar Hiper

Terlebih dahulu akan dibahas mengenai BCK-aljabar. BCK-aljabar merupakan salah satu kelas dari K-aljabar bila grup $(X,\bullet)$ yang membangun K-aljabar adalah grup komutatif.

Jika pada X dilengkapi dengan operasi biner $*$ yang didefinisikan oleh $x \bullet y = x * (0 * y)$ untuk setiap $x, y \in X$ maka

$$x * y = x \bullet y^{-1}, \forall x, y \in X \quad (2.1)$$

Berikut akan diberikan definisi dari BCK-aljabar.

Definisi 2.1 [2] Misalkan X suatu himpunan tidak kosong dengan sebuah operasi biner $*$ dan 0 sebagai elemen khusus. Suatu aljabar $(X, *, 0)$ tipe (2,0) disebut BCK-aljabar jika $\forall x, y, z \in X$ memenuhi aksioma-aksioma di bawah ini.

$(BCK1)$ $\big((x * y) * (x * z)\big) * (z * y) = 0,$

$(BCK2)$ $\big(x * (x * y)\big) * y = 0,$

$(BCK3)$ $x * x = 0,$

$(BCK4)$ $x * y = 0$ dan $y * x = 0$ maka $x = y,$

$(BCK5)$ $0 * x = 0.$

Contoh 2.1

Misalkan $X = \{0, a, b, c\}$ dan didefinisikan suatu operasi biner $*$ pada X sebagaimana diberikan oleh Tabel Cayley berikut ini

Tabel 2.1 Pendefinisian operasi biner $*$ pada X

$*$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	a	a
b	b	b	0	b
c	c	c	c	0

Maka $(X, *, 0)$ merupakan BCK-aljabar.
Hal ini dapat dilihat dari tabel bahwa aksioma $(BCK1)$ sampai $(BCK5)$ dipenuhi oleh X.

Selanjutnya akan diberikan sifat-sifat yang berlaku pada BCK-aljabar

Proposisi 2.2 [2] Misalkan $(X, *, 0)$ suatu BCK-aljabar, sehingga untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku

1) $x * 0 = x.$
2) $(x * y) * z = (x * z) * y.$

Bukti:
Ambil $x, y, z \in X$.

1) $$\begin{aligned} x * 0 &= x * (x * x) \\ &= x \bullet (x \bullet x^{-1})^{-1} \\ &= x \bullet ((x^{-1})^{-1} \bullet x^{-1}) \\ &= x \bullet (x \bullet x^{-1}) \\ &= x \bullet e \\ &= x \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} (x * y) * z &= (x \bullet y^{-1}) \bullet z^{-1} \\ &= x \bullet (y^{-1} \bullet z^{-1}) \\ &= x \bullet (z^{-1} \bullet y^{-1}) \\ &= (x \bullet z^{-1}) \bullet y^{-1} \\ &= (x \bullet z^{-1}) * y \\ &= (x * z) * y \end{aligned}$$

Salah satu konsep penting dalam pembahasan BCK-aljabar hiper yaitu mengenai relasi "$\leq$". Kemudian akan diberikan definisi dari relasi "$\leq$" tersebut.

Definisi 2.3 [1] Misalkan $(X, *, 0)$ suatu BCK-aljabar dan didefinisikan relasi "$\leq$" sebagai $x \leq y$ jika dan hanya jika $x * y = 0$ untuk setiap $x, y \in X$.

Proposisi 2.4 [2] Misalkan $(X, *, 0)$ suatu BCK-aljabar. Jika pada X didefinisikan relasi "$\leq$" seperti yang telah diberikan oleh Definisi 2.3 maka relasi "$\leq$" merupakan relasi terurut parsial.

Bukti :

Misalkan $(X, *, 0)$ suatu BCK-aljabar dengan $x, y, z \in X$.

Untuk membuktikan relasi "$\leq$" merupakan relasi terurut parsial akan dibuktikan relasi "$\leq$" bersifat refleksif, antisimetrik dan transitif.

1. Relasi $\leq$ bersifat refleksif.
   Berdasarkan aksioma $BCK3$ diperoleh $x * x = 0$ yang berarti $x \leq x$ sehingga terbukti bahwa relasi $\leq$ bersifat refleksif.
2. Relasi $\leq$ bersifat antisimetrik.
   Berdasarkan aksioma $BCK4$ diperoleh $x * y = 0$ dan $y * x = 0$ maka $x = y$ berarti $x \leq y$ dan $y \leq x$ maka $x = y$ sehingga terbukti bahwa relasi $\leq$ bersifat antisimetrik.
3. Relasi $\leq$ bersifat transitif.
   Karena dari hubungan $x * y = 0$ dan $y * z = 0$ berakibat $x * z = 0$ maka terbukti bahwa relasi $\leq$ bersifat transitif.

Dengan demikian, terbukti bahwa relasi $\leq$ merupakan relasi terurut parsial.

Dengan memanfaatkan relasi $\leq$, dimiliki definisi alternatif mengenai BCK-aljabar.

Definisi 2.5 **[1]** Misalkan X suatu himpunan tidak kosong dengan sebuah operasi biner " $*$ " dan 0 sebagai elemen khusus. Suatu aljabar $(X,*,0)$ tipe (2,0) disebut BCK-aljabar jika untuk setiap $x, y, z \in X$ memenuhi aksioma-aksioma berikut

$(BCK1')$ $(x * y) * (x * z) \leq z * y$,
$(BCK2')$ $x * (x * y) \leq y$,
$(BCK3')$ $x \leq x$,
$(BCK4')$ $x \leq y$ dan $y \leq x$ maka $x = y$,
$(BCK5')$ $0 \leq x$.

Lemma 2.6 Misalkan $(X,*,0)$ suatu BCK-aljabar, maka untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku $(x * z) * (x * y) = (y * z)$

Bukti :
Ambil sebarang unsur $x, y, z \in X$.

$$\begin{aligned}(x * z) * (x * y) &= (x \bullet z^{-1}) \bullet (x \bullet y^{-1})^{-1} \\ &= (x \bullet z^{-1}) \bullet ((y^{-1})^{-1} \bullet x^{-1}) \\ &= (x \bullet z^{-1}) \bullet (y \bullet x^{-1}) \\ &= (y \bullet x^{-1}) \bullet (x \bullet z^{-1}) \\ &= y \bullet (x^{-1} \bullet x) \bullet z^{-1} \\ &= y * z\end{aligned}$$

Terbukti $(x * z) * (x * y) = (y * z)$ $\forall x, y, z \in X$.

Proposisi 2.7 **[2]** Misalkan $(X,*,0)$ suatu BCK-aljabar, maka untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku

1. $(x * z) * (y * z) \leq x * y$,
2. $x \leq y \Longrightarrow x * z \leq y * z, z * y \leq z * x$.

Bukti:
Ambil sebarang $x, y, z \in X$.

1) Misalkan $u = x * z$ dan $v = x * y$ sehingga dengan menggunakan Lemma 2.6 diperoleh
$$u * v = (x * z) * (x * y) = y * z$$
Sehingga,
$$\begin{aligned}&\big((x * z) * (y * z)\big) * (x * y) \\ &= \big(u * (y * z)\big) * v \\ &= \big(u * (u * v)\big) * v \\ &= 0\end{aligned}$$
Terbukti bahwa $\big((x * z) * (y * z)\big) * (x * y) = 0$ atau $(x * z) * (y * z) \leq x * y$. ∎

2) a) Akan ditunjukkan bahwa $x * y = 0 \Longrightarrow (x * z) * (y * z) = 0$

$$\begin{aligned}(x * z) * (y * z) &= (x \bullet z^{-1}) \bullet ((z^{-1})^{-1} \bullet y^{-1}) \\ &= (x \bullet z^{-1}) \bullet (z \bullet y^{-1}) \\ &= x \bullet (z^{-1} \bullet z) \bullet y^{-1} \\ &= x \bullet (z \bullet z^{-1}) \bullet y^{-1} \\ &= x * y \\ &= 0\end{aligned}$$

b) Akan ditunjukkan bahwa $x * y = 0 \Longrightarrow (z * y) * (z * x) = 0$

$$\begin{aligned}(z * y) * (z * x) &= (z \bullet y^{-1}) \bullet ((x^{-1})^{-1} \bullet z^{-1}) \\ &= (z \bullet y^{-1}) \bullet (x \bullet z^{-1}) \\ &= (x \bullet z^{-1}) \bullet (z \bullet y^{-1}) \\ &= x \bullet (z^{-1} \bullet z) \bullet y^{-1} \\ &= x \bullet (z \bullet z^{-1}) \bullet y^{-1} \\ &= x * y \\ &= 0\end{aligned}$$

Dari a dan b terbukti bahwa $x * y = 0 \Longrightarrow (x * z) * (y * z) = 0$, $(z * y) * (z * x) = 0$.

Definisi 2.8 **[1]** Misalkan X suatu himpunan tidak kosong. Suatu operasi hiper $\circledast$ pada X adalah sebuah pemetaan dari X x X ke $P^*(X)$ dimana $P^*(X) = P(X) \backslash \emptyset$.

Contoh 2.2
Misal diberikan $X = \{a, b\}$ maka
X x $X = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$ dan
$P(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ sehingga
$P^*(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.
Kemudian dibuat pengkaitan $\circledast$ dari X x X ke $P^*(X)$ seperti dibawah ini :
$(a, a) \longmapsto \{a\}$, $(a, b) \longmapsto \{b\}$, $(b, a) \longmapsto \{a\}$ dan $(b, b) \longmapsto \{b\}$.
Pengkaitan di atas mendefinisikan pemetaan $\circledast : X$ x $X \longrightarrow P^*(X)$, lebih lanjut $\circledast$ merupakan operasi hiper pada X.
Selanjutnya akan diberikan definisi dari BCK-aljabar hiper

Definisi 2.9 [1] Misalkan X suatu himpunan tidak kosong dengan sebuah operasi hiper $\circledast$ dan 0 sebagai elemen khusus. Suatu aljabar $(X,\circledast,0)$ tipe (2,0) disebut BCK-aljabar hiper jika untuk setiap $x,y,z \in X$ memenuhi aksioma-aksioma dibawah ini

$(H1)$ $(x \circledast y) \circledast z = (x \circledast z) \circledast y$,
$(H2)$ $t \in x \circledast (x \circledast y) \Rightarrow t \leq y$,
$(H3)$ $x \leq y \Longrightarrow x \circledast z \leq y \circledast z$ dan $z \circledast y \leq z \circledast x$,
$(H4)$ $x \leq x$,
$(H5)$ $0 \leq x$,
$(H6)$ $x \leq y,\ y \leq x \Rightarrow x = y$

dengan $x \leq y$ didefinisikan sebagai $0 \in x \circledast y$ untuk setiap $x,y \in X$ dan $A \leq B$ didefinisikan untuk setiap $b \in B$ terdapat $a \in A$ sedemikian sehingga $a \leq b$ dengan $A,B \subseteq X$.

Untuk selanjutnya, misalkan $(X,\circledast,0)$ suatu BCK-aljabar hiper. Notasi $x \circledast y = z$ dengan z di ruas kanan dimaksudkan sebagai $\{z\}$ untuk setiap $x,y,z \in X$.

Contoh 2.3

Berdasarkan Contoh 2.1, telah diperlihatkan $X = \{0,a,b,c\}$ suatu BCK-aljabar terhadap operasi biner $*$ pada X. Dengan mengasumsikan hasil pengoperasian pada Tabel 2.1 sebagai himpunan dengan satu unsur maka operasi biner $*$ pada X merupakan operasi hiper $\circledast$ pada X karena $\circledast$ merupakan pemetaan dari $X \times X$ ke $P^*(X)$, seperti yang terlihat pada tabel berikut ini.

Tabel 2.2 Pendefinisian operasi hiper $\circledast$ pada X

$\circledast$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	a	a
b	b	b	0	b
c	c	c	c	0

Maka $(X,*,0)$ merupakan BCK-aljabar hiper.

Hal ini dapat dilihat dari tabel bahwa aksioma $(H1)$ sampai $(H6)$ dipenuhi oleh X.

Contoh 2.4

Misalkan $X = \{0,a,b,c\}$ suatu BCK-aljabar hiper dengan suatu operasi hiper $\circledast$ pada X. Misalkan A dan B merupakan himpunan bagian tidak kosong dari X dengan $A = \{0,a,b\}$ dan $B = \{0,a\}$.

Dapat diperlihatkan bahwa $A \leq B$ karena

i. Untuk $0 \in B$ terdapat $0 \in A$ sedemikian sehingga $0 \circledast 0 = 0$ atau $0 \leq 0$.
ii. Untuk $a \in B$ terdapat $0, a \in A$ sedemikian sehingga $0 \circledast a = 0$ dan $a \circledast a = 0$ atau $0 \leq a$ dan $a \leq a$.

Karena untuk setiap $y \in B$ terdapat $x \in A$ sedemikian sehingga $x \leq y$ maka terbukti $A \leq B$.

Untuk memperlihatkan bahwa BCK-aljabar hiper
dapat dipandang sebagai BCK-aljabar, diberikan teorema berikut.

Teorema 2.10 Misalkan $(X,\circledast,0)$ suatu BCK-aljabar hiper maka $(X,*,0)$ suatu BCK-aljabar.

Bukti :

Misalkan $(X,\circledast,0)$ suatu BCK-aljabar hiper.

Dengan mengasumsikan himpunan hasil operasi hiper sebagai unsur maka operasi hiper $\circledast$ pada BCK-aljabar hiper bisa dipandang sebagai operasi biner $*$ pada BCK-aljabar.

Ambil sebarang $x,y,z \in X$.

1. Akan diperlihatkan $BCK1'$ dipenuhi BCK-aljabar hiper. Dengan menggunakan aksioma $H1$ yang dimiliki BCK-aljabar hiper, dapat diperlihatkan $(x \circledast y) \circledast z = (x \circledast z) \circledast y \Longrightarrow [(x*y)*(x*z)]*(z*y) = 0$.
   Sehingga terbukti $BCK1'$ terpenuhi pada BCK-aljabar hiper $(X,\circledast,0)$.
2. Akan diperlihatkan dipenuhinya aksioma $BCK2'$. Pada BCK-aljabar hiper $(X,\circledast,0)$ berlaku aksioma $H2$ yaitu $t \in x \circledast (x \circledast y) \Rightarrow t \leq y \quad \forall x,y \in X$.
   Menurut aksioma $H2$ dapat dilihat untuk setiap $t \in x \circledast (x \circledast y)$ dengan $x,y \in X$ berlaku $t \leq y$. Dengan mengasumsikan himpunan hasil operasi hiper pada BCK-aljabar hiper $(X,\circledast,0)$ sebagai unsur maka $t = x \circledast (x \circledast y)$ atau $t = x*(x*y)$ sehingga menurut aksioma $H2$ berlaku $t = x*(x*y) \leq y$ atau $x*(x*y) \leq y$. Sehingga aksioma $BCK2'$ yaitu $x*(x*y) \leq y\ \forall x,y \in X$ telah terpenuhi pada BCK-aljabar hiper $(X,\circledast,0)$.

3. Akan diperlihatkan dipenuhinya aksioma $BCK3'$, $BCK4'$ dan $BCK5'$.
   Pada BCK-aljabar hiper $(X,\circledast,0)$ dengan 0 sebagai elemen khusus, jika himpunan hasil operasi hiper pada BCK-aljabar hiper $(X,\circledast,0)$ diasumsikan sebagai unsur maka aksioma $BCK3'$, $BCK4'$ dan $BCK5'$ yang dimiliki BCK-aljabar terpenuhi pada BCK-aljabar hiper $(X,\circledast,0)$ $\forall x,y \in X$.

Karena semua aksioma pada BCK-aljabar juga berlaku pada BCK-aljabar hiper maka terbukti BCK-aljabar hiper dapat dipandang sebagai BCK-aljabar dengan memandang operasi hiper pada BCK-aljabar hiper sebagai operasi biner pada BCK-aljabar.

Teorema 2.11 [1] Misalkan X suatu BCK-aljabar hiper dan A suatu himpunan bagian tidak kosong dari X maka untuk setiap $x,y \in X$ berlaku

(i) $(x \circledast y) \circledast A = (x \circledast A) \circledast y$,

(ii) $x \circledast (x \circledast \{0\}) = \{0\}$.

Bukti:

Ambil sebarang $x,y \in X$.

(i) Dengan menggunakan persamaan (2.1) dapat dibuktikan $(x \circledast y) \circledast A \subseteq (x \circledast A) \circledast y$ dan $(x \circledast A) \circledast y \subseteq (x \circledast y) \circledast A$ dan karena ini berlaku $\forall x,y \in X$ maka terbukti bahwa $(x \circledast y) \circledast A = (x \circledast A) \circledast y$.

(ii) Dengan menggunakan persamaan (2.1) dapat dibuktikan $x \circledast (x \circledast \{0\}) \subseteq \{0\}$ dan $\{0\} \subseteq x \circledast (x \circledast \{0\})$ dan karena ini berlaku $\forall x \in X$ maka terbukti $x \circledast (x \circledast \{0\}) = \{0\}$.

Lemma 2.12 Misalkan $(X,\circledast,0)$ suatu BCK-aljabar hiper, maka untuk setiap $x,y,z \in X$ berlaku $(x \circledast y) \circledast (z \circledast y) = (x \circledast z)$

Bukti :

Ambil sebarang unsur $x,y,z \in X$.

$$\begin{aligned}(x \circledast y) \circledast (z \circledast y) &= (x \bullet y^{-1}) \bullet (z \bullet y^{-1})^{-1}\\ &= (x \bullet y^{-1}) \bullet ((y^{-1})^{-1} \bullet z^{-1})\\ &= (x \bullet y^{-1}) \bullet (y \bullet z^{-1})\\ &= x \bullet (y^{-1} \bullet y) \bullet z^{-1}\\ &= x \bullet (y \bullet y^{-1}) \bullet z^{-1}\\ &= x \circledast z\end{aligned}$$

Terbukti $(x \circledast y) * (z \circledast y) = (x \circledast z) \forall x,y,z \in X$.

Selanjutnya akan diberikan sifat-sifat yang berlaku dalam BCK-aljabar hiper.

Teorema 2.13 [1] Misalkan $(X,\circledast,0)$ suatu BCK-aljabar hiper maka untuk setiap $x,y,z \in X$ berlaku

(i) $(x \circledast y) \circledast (x \circledast z) \le z \circledast y$,

(ii) $x \le y, y \le z \Longrightarrow x \le z$.

Bukti:

Ambil $x,y,z \in X$

(i) Misalkan $u = x \circledast y$ dan $v = z \circledast y$ sehingga dengan menggunakan Lemma 2.12 diperoleh

$u \circledast v = (x \circledast y) \circledast (z \circledast y) = x \circledast z$

Sehingga,

$$\begin{aligned}\big((x \circledast y) \circledast (x \circledast z)\big) \circledast (z \circledast y) &= \big(u \circledast (x \circledast z)\big) \circledast v\\ &= (u \circledast (u \circledast v)) \circledast v\\ &= 0\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\big((x \circledast y) \circledast (x \circledast z)\big) \circledast (z \circledast y) = 0$.

(ii) Untuk membuktikan $x \le y, y \le z \Longrightarrow x \le z$ dapat dilakukan dengan membuktikan bahwa $x \circledast y = 0, y \circledast z = 0 \Longrightarrow x \circledast z = 0$.

$$\begin{aligned}x \circledast z &= (x \circledast 0) \circledast (z \circledast 0)\\ &= (x \circledast (x \circledast y)) \circledast (z \circledast 0)\\ &= \big(x \circledast (x \circledast y)\big) \circledast \big(z \circledast (y \circledast z)\big)\\ &= (x \bullet (x \bullet y^{-1})^{-1}) \circledast (z \bullet (y \bullet z^{-1})^{-1})\\ &= (x \bullet (x \bullet y^{-1})^{-1}) \circledast \big(z \bullet ((z^{-1})^{-1} \bullet y^{-1})\big)\\ &= \big(x \bullet ((y^{-1})^{-1} \bullet x^{-1})\big) \circledast (z \bullet ((z^{-1})^{-1} \bullet y^{-1}))\\ &= (x \bullet (y \bullet x^{-1})) \circledast (z \bullet (z \bullet y^{-1}))\\ &= (x \bullet (x^{-1} \bullet y)) \circledast (z \bullet (z \bullet y^{-1}))\\ &= ((x \bullet x^{-1}) \bullet y) \circledast (z \bullet (z \bullet y^{-1}))\\ &= (e \bullet y) \circledast (z \bullet (z \bullet y^{-1}))\\ &= y \bullet (z \bullet (z \bullet y^{-1}))^{-1}\\ &= y \bullet ((z \bullet y^{-1})^{-1} \bullet z^{-1})\\ &= y \bullet (((y^{-1})^{-1} \bullet z^{-1}) \bullet z^{-1})\\ &= y \bullet ((y \bullet z^{-1}) \bullet z^{-1})\end{aligned}$$

$= y \bullet ((z^{-1} \bullet y) \bullet z^{-1})$
$= y \bullet (z^{-1} \bullet (y \bullet z^{-1}))$
$= (y \bullet z^{-1}) \bullet (y \bullet z^{-1})$
$= (y * z) \bullet (y \bullet z^{-1})$
$= 0 \bullet (y \bullet z^{-1})$
$= 0 \bullet (z \bullet y^{-1})^{-1}$
$= 0 \circledast (z \circledast y)$
$= 0$

Terbukti $x \circledast y = 0, y \circledast z = 0 \Longrightarrow x \circledast z = 0$ atau $x \leq y, y \leq z \Longrightarrow x \leq z$. ■

Teorema 2.14 [1] Misalkan $(X, \circledast, 0)$ suatu BCK-aljabar hiper dan A, B, C merupakan himpunan bagian tidak kosong dari X, maka untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku

(i) $x \circledast y \leq z \Longrightarrow x \circledast z \leq y$,
(ii) $x \circledast y \leq x$,
(iii) $x \leq x \circledast 0$,
(iv) $A \leq B, B \leq C \Longrightarrow A \leq C$,
(v) $A \circledast y \leq A$,
(vi) $x \circledast A \leq z \Leftrightarrow x \circledast z \leq A$,
(vii) $A \leq B \Longrightarrow A \circledast C \leq B \circledast C$ dan $C \circledast B \leq C \circledast A$,
$(viii)$ $A \leq A \circledast 0$,
(ix) $x \in \{x\} \circledast 0$,
(x) $t \in \{0\} \circledast 0 \Leftrightarrow t = 0$,
(xi) $x \circledast x = \{x\} \Leftrightarrow x = 0$.

Bukti:
Ambil $x, y, z \in X$.

(i) Dengan menggunakan proposisi 2.2 no.2 dapat dibuktikan $(x \circledast y) \circledast z = 0 \Longrightarrow (x \circledast z) \circledast y = 0$. Sehingga terbukti $x \circledast y \leq z \Longrightarrow x \circledast z \leq y$.

(ii) Dengan menggunakan persamaan (2.1), aksioma $BCK3$ dan $BCK5$ dapat dibuktikan $(x \circledast y) \circledast x = 0$. Sehingga terbukti bahwa $x \circledast y \leq x$.

(iii) Dengan menggunakan proposisi 2.2 no.1 dan aksioma $BCK3$ dapat dibuktikan $x \circledast (x \circledast 0) = 0$. Sehingga terbukti bahwa $x \leq x \circledast 0$.

(iv) Ambil sebarang $c \in C$. Karena $B \leq C$ maka $\exists b \in B \ni b \leq c$ atau $b \circledast c = 0$. Untuk $b \in B$ tersebut, karena $A \leq B$ maka $\exists a \in A \ni a \leq b$ atau $a \circledast b = 0$. Sehingga, $\forall c \in C$ $\exists a \in A$. Dengan menggunakan persamaan (2.1) dan aksioma $BCK5$ dapat ditunjukkan $a \leq c$ atau $a \circledast c = 0$ dan karena ini berlaku untuk setiap $a \in A$ dan $c \in C$ sehingga terbukti bahwa $A \leq C$.
Jadi, terbukti $A \leq B, B \leq C \Longrightarrow A \leq C$.

(v) Ambil sebarang $a \in A$.
Akan ditunjukkan $\exists x \circledast y \in A \circledast y$, $\ni x \circledast y \leq a$ atau $(x \circledast y) \circledast a = 0$.
Dengan menggunakan proposisi 2.2 no.2, aksioma $BCK3$ dan $BCK5$ dapat ditunjukkan $(a \circledast y) \circledast a = 0$ untuk $x = a$.
Karena $(a \circledast y) \circledast a = 0$ atau $a \circledast y \leq a$ maka $\exists a \circledast y \in A \circledast y$ dan karena ini berlaku $\forall a \circledast y \in A \circledast y$ dengan $a \in A$ sehingga terbukti bahwa $A \circledast y \leq A$.

(vi) a). Akan ditunjukkan $x \circledast A \leq z \Longrightarrow x \circledast z \leq A$ atau $(x \circledast A) \circledast z = 0 \Longrightarrow (x \circledast z) \circledast A = 0$. Ambil sebarang $(x \circledast a) \circledast z \in (x \circledast A) \circledast z$ dengan $a \in A$ dan $x, z \in X$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $(x \circledast a) \circledast z = 0 \Longrightarrow (x \circledast z) \circledast a = 0$ dengan $(x \circledast z) \circledast a \in (x \circledast z) \circledast A$. Dengan menggunakan proposisi 2.2 no.2 dapat ditunjukkan $(x \circledast z) \circledast a = 0$. Karena terbukti bahwa $(x \circledast a) \circledast z = 0 \Longrightarrow (x \circledast z) \circledast a = 0$ dan karena ini berlaku untuk setiap $(x \circledast a) \circledast z \in (x \circledast A) \circledast z$ dan $(x \circledast z) \circledast a \in (x \circledast z) \circledast A$ sehingga terbukti $(x \circledast A) \circledast z = 0 \Longrightarrow (x \circledast z) \circledast A = 0$ atau $x \circledast A \leq z \Longrightarrow x \circledast z \leq A$.

b) Akan ditunjukkan $x \circledast z \leq A \Longrightarrow x \circledast A \leq z$ atau $(x \circledast z) \circledast A = 0 \Longrightarrow (x \circledast A) \circledast z = 0$. Ambil sebarang $(x \circledast z) \circledast a \in (x \circledast z) \circledast A$ dengan $a \in A$ dan $x, z \in X$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $(x \circledast z) \circledast a = 0 \Longrightarrow (x \circledast a) \circledast z = 0$ dengan $(x \circledast a) \circledast z \in (x \circledast A) \circledast z$. Dengan menggunakan proposisi 2.2 no.2 dapat ditunjukkan $(x \circledast a) \circledast z = 0$. Karena terbukti bahwa $(x \circledast z) \circledast a = 0 \Longrightarrow (x \circledast a) \circledast z = 0$ dan karena ini berlaku untuk setiap

$(x \circledast z) \circledast a \in (x \circledast z) \circledast A$ dan $(x \circledast a) \circledast z \in (x \circledast A) \circledast z$ sehingga terbukti $(x \circledast z) \circledast A = 0 \Rightarrow (x \circledast A) \circledast z = 0$ atau $x \circledast z \leq A \Rightarrow x \circledast A \leq z$.

Jadi, terbukti $x \circledast A \leq z \Leftrightarrow x \circledast z \leq A$.

(vii)a).Akan ditunjukkan $A \leq B \Rightarrow A \circledast C \leq B \circledast C$. Diketahui $A \leq B$ sehingga $\forall b \in B\ \exists a \in A, \ni a \leq b$ atau $a \circledast b = 0$.

Ambil sebarang $b \circledast c \in B \circledast C$. Akan ditunjukkan $\exists a \circledast c \in A \circledast C$, $\exists a \circledast c \leq b \circledast c$ atau $(a \circledast c) \circledast (b \circledast c) = 0$.

Dari $b \circledast c \in B \circledast C$ dengan $b \in B$ dan $c \in C$ dan dari $A \leq B$ berarti $\forall b \in B$, $\exists a \in A$, $\ni a \leq b$ atau $a \circledast b = 0$. Karena $\exists a \in A$ dan $\exists c \in C$ maka $a \circledast c \in A \circledast C$.

Dengan menggunakan persamaan (2.1) dapat ditunjukkan $(a \circledast c) \circledast (b \circledast c) = 0$ atau $a \circledast c \leq b \circledast c$ dan karena ini berlaku untuk setiap $a \circledast c \in A \circledast C$ dan $b \circledast c \in B \circledast C$ sehingga terbukti $A \circledast C \leq B \circledast C$.

Jadi, terbukti $A \leq B \Rightarrow A \circledast C \leq B \circledast C$.

b).Akan ditunjukkan $A \leq B \Rightarrow C \circledast B \leq C \circledast A$. Diketahui $A \leq B$ sehingga $\forall b \in B\ \exists a \in A, \ni a \leq b$ atau $a \circledast b = 0$.

Ambil sebarang $c \circledast a \in C \circledast A$. Akan ditunjukkan $\exists c \circledast b \in C \circledast B$, $\ni c \circledast b \leq c \circledast a$ atau $(c \circledast b) \circledast (c \circledast a) = 0$.

Dari $c \circledast a \in C \circledast A$ dengan $c \in C$ dan $a \in A$ dan dari $A \leq B$ berarti untuk setiap $b \in B$ terdapat $a \in A$ sedemikian sehingga $a \leq b$ atau $a \circledast b = 0$. Karena $\exists c \in C$ dan $\exists b \in B$ maka $c \circledast b \in C \circledast B$.

Dengan menggunakan persamaan (2.1) dapat ditunjukkan $(c \circledast b) \circledast (c \circledast a) = 0$ atau $c \circledast b \leq c \circledast a$ dan karena ini berlaku untuk setiap $c \circledast b \in C \circledast B$ dan $c \circledast a \in C \circledast A$, terbukti $C \circledast B \leq C \circledast A$.

Jadi, terbukti $A \leq B \Rightarrow C \circledast B \leq C \circledast A$.

Sehingga, dari a) dan b) terbukti bahwa $A \leq B \Rightarrow A \circledast C \leq B \circledast C$ dan $C \circledast B \leq C \circledast A$.

$(viii)$ Ambil sebarang $a \circledast 0 \in A \circledast 0$ dengan $a \in A$. Akan ditunjukkan $\exists x \in A$, $\ni x \leq a \circledast 0$ atau $x \circledast (a \circledast 0) = 0$. Dengan menggunakan proposisi 2.2 no.1 dan aksioma $BCK3$ dapat ditunjukkan $a \circledast (a \circledast 0) = 0$ atau $a \leq a \circledast 0$ dan karena ini berlaku $\forall a \circledast 0 \in A \circledast 0$ dengan $a \in A$ maka terbukti $A \leq A \circledast 0$.

(ix) Akan ditunjukkan bahwa $x \in \{x\} \circledast 0$.

Untuk $x \in \{x\}$.

Dari proposisi 2.12 no.1 berlaku bahwa $x \circledast 0 = x$ atau $x = x \circledast 0$ dengan $x \in \{x\}$.

Karena $x \in \{x\}$ maka $x = x \circledast 0 \in \{x\} \circledast 0$ atau $x \in \{x\} \circledast 0$.

Jadi, terbukti bahwa $x \in \{x\} \circledast 0$.

(x) a). Akan ditunjukkan $t \in \{0\} \circledast 0 \Rightarrow t = 0$.

Ambil $t \in \{0\} \circledast 0$ yaitu $t = 0 \circledast 0$ dengan $0 \in \{0\}$. Dengan menggunakan aksioma $BCK3$ yaitu $x \circledast x = 0$ dengan $x \in X$ maka $0 \circledast 0 = 0$. Sehingga $t = 0 \circledast 0 = 0$ atau $t = 0$. Jadi, terbukti bahwa $t \in \{0\} \circledast 0 \Rightarrow t = 0$.

a) Akan ditunjukkan $t = 0 \Rightarrow t \in \{0\} \circledast 0$.

Telah dimiliki $t = 0$.

Dengan menggunakan aksioma $BCK3$ yaitu $x \circledast x = 0$ dengan $x \in X$ maka $0 \circledast 0 = 0$ atau $0 = 0 \circledast 0$. Sehingga $t = 0 = 0 \circledast 0$ atau $t = 0 \circledast 0$.

Karena $0 \in \{0\}$ maka $t = 0 \circledast 0 \in \{0\} \circledast 0$ atau $t \in \{0\} \circledast 0$.

Jadi, terbukti $t = 0 \Rightarrow t \in \{0\} \circledast 0$.

Dari a) dan b) terbukti $t \in \{0\} \circledast 0 \Leftrightarrow t = 0$.

(xi) a) Akan ditunjukkan $x \circledast x = \{x\} \Rightarrow x = 0$.

Untuk membuktikan $x \circledast x = \{x\} \Rightarrow x = 0$ dapat dilakukan dengan membuktikan bahwa $x \circledast x = x \Longrightarrow x = 0$ dimana $x \circledast x = x \in x \circledast x = \{x\}$ dengan $x \in \{x\}$. Ambil sebarang $x \circledast x = x \in x \circledast x = \{x\}$, akan ditunjukkan $x \circledast x = x \Longrightarrow x = 0$. Dengan menggunakan aksioma $BCK3$ dapat ditunjukkan $x = 0$. Karena $x \circledast x = x \Longrightarrow x = 0$ dan karena ini berlaku untuk setiap $x \circledast x = x \in x \circledast x = \{x\}$ dengan $x \in \{x\}$ maka terbukti bahwa $x \circledast x = \{x\} \Longrightarrow x = 0$.

b) Akan ditunjukkan $x = 0 \Longrightarrow x \circledast x = \{x\}$.
Untuk membuktikan $x = 0 \Longrightarrow x \circledast x = \{x\}$ dapat dilakukan dengan membuktikan $x = 0 \Longrightarrow x \circledast x = x$ dimana $x \circledast x = x \in x \circledast x = \{x\}$ dengan $x \in \{x\}$. Dengan menggunakan proposisi 2.2 no.1 dapat ditunjukkan $x \circledast x = x$. Karena terbukti $x = 0 \Longrightarrow x \circledast x = x$ dan karena ini berlaku untuk setiap $x \in \{x\}$ sehingga terbukti bahwa $x = 0 \Longrightarrow x \circledast x = \{x\}$.

Dengan demikian, dari a) dan b) terbukti bahwa $x \circledast x = \{x\} \Longleftrightarrow x = 0$. ■

2.2 Relasi Hiper pada BCK-Aljabar Hiper

Berikut diberikan definisi dari relasi hiper.

Definisi 2.15 [1] Misalkan A dan B merupakan himpunan tidak kosong dan $P(B)$ merupakan himpunan kuasa dari B. Suatu relasi hiper "θ" pada $A \times B$ adalah sebuah pemetaan dari $A \times B$ ke $P(B)$.

Contoh 2.5
Misal diberikan $A = \{x, y\}$ dan $B = \{a, b, c\}$ maka
$A \times B = \{(x, a), (x, b), (x, c), (y, a), (y, b), (y, c)\}$
dan $P(B) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.
Kemudian dibuat pengkaitan θ dari $A \times B$ ke $P(B)$ seperti dibawah ini :
$(x, a) \longmapsto \{a\}$, $(x, b) \longmapsto \{b\}$, $(x, c) \longmapsto \{c\}$, $(y, a) \longmapsto \{a\}$, $(y, b) \longmapsto \{b\}$ dan $(y, c) \longmapsto \{c\}$

Pengkaitan di atas mendefinisikan pemetaan $\theta : A \times B \longrightarrow P(B)$, lebih lanjut θ merupakan relasi hiper pada $A \times B$.

Kemudian jika pada Definisi 2.15 diambil $A, B \in P^*(A)$ dimana $P^*(A) = P(A)\backslash\emptyset$ maka akan diperoleh definisi dari relasi hiper berikut.

Definisi 2.16 [1] Misalkan A suatu himpunan tidak kosong dan $P^*(A) = P(A)\backslash\emptyset$. Misalkan $C, D \in P^*(A)$ maka $\theta(C, D)$ dimaksudkan sebagai $\bigcup_{c\in C, d\in D} \theta(c, d)$ dengan $\theta(c, d)$ adalah himpunan bagian dari $P^*(A)$ atau $\theta(C, D) = \bigcup_{c\in C, d\in D} \theta(c, d)$.

Contoh 2.6
Misal diberikan $A = \{x, y, z\}$ maka$P(A) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}$ sehingga
$P^*(A) = \{\{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}$.
Ambil $C, D \in P^*(A)$ dengan $C = \{x, y\}$ dan $D = \{y, z\}$ sehingga diperoleh
$C \times D = \{(x, y), (x, z), (y, y), (y, z)\}$.
Kemudian dibuat pengkaitan θ dari $C \times D$ ke $P^*(A)$ seperti dibawah ini :
$(x, y) \longmapsto \{y, z\}$, $(x, z) \longmapsto \{z\}$, $(y, y) \longmapsto \{y, z\}$ dan $(y, z) \longmapsto \{z\}$.
Pengkaitan di atas mendefinisikan pemetaan $\theta : C \times D \longrightarrow P^*(A)$, lebih lanjut θ merupakan relasi hiper pada $C \times D$.
Selanjutnya

$$\begin{aligned} \theta(C, D) &= \bigcup_{c\in C, d\in D} \theta(c, d) \\ &= \theta(x, y) \cup \theta(x, z) \cup \theta(y, y) \cup (y, z) \\ &= \{y, z\} \cup \{z\} \cup \{y, z\} \cup \{z\} \\ &= \{y, z\}. \end{aligned}$$

Kemudian jika pada Definisi 2.15 diambil $A = B$ maka diperoleh definisi relasi ekuivalensi hiper seperti berikut.

Definisi 2.17 [1]
Misalkan Y suatu himpunan tidak kosong dan $\theta : Y \times Y \longrightarrow P^*(Y)$ merupakan relasi hiper pada $Y \times Y$. Relasi hiper θ dikatakan relasi ekuivalensi hiper pada $Y \times Y$ jika untuk setiap $x, y, z \in Y$ memenuhi

i. $\theta(x,x) = \bigcup_{y,z\in Y} \theta(y,z)$ atau relasi hiper "θ" bersifat refleksif.
ii. $\theta(x,y) = \theta(y,x)$ atau relasi hiper "θ" bersifat simetris.
iii. $\theta(x,z) \cap \theta(z,y) \subseteq \theta(x,y)$ atau relasi hiper "θ" bersifat transitif.

Contoh 2.7

Misal diberikan $Y = \{a, b\}$ maka $Y \times Y = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$ dan $P^*(Y) = \{\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$.

Kemudian dibuat pengkaitan θ dari $Y \times Y$ ke $P^*(Y)$ seperti dibawah ini :

$(a,a) \longmapsto \{a,b\}$, $(a,b) \longmapsto \{a\}$, $(b,a) \longmapsto \{a\}$ dan $(b,b) \longmapsto \{a,b\}$.

Pengkaitan di atas mendefinisikan pemetaan $\theta: Y \times Y \longrightarrow P^*(Y)$, lebih lanjut θ merupakan relasi hiper pada $Y \times Y$.

Kemudian akan diperlihatkan bahwa θ merupakan relasi ekuivalensi hiper pada $Y \times Y$.

i. Akan diperlihatkan θ bersifat refleksif, yaitu akan ditunjukkan $\theta(x,x) = \bigcup_{y,z\in Y} \theta(y,z)$ untuk setiap $x,y,z \in Y$.

   Untuk membuktikan θ bersifat refleksif, hanya akan ditunjukkan untuk unsur $(a,a),(b,b) \in Y \times Y$.

   1) Untuk $(a,a) \in Y \times Y$.
      $\theta(a,a) = \{a,b\}$.
      Kemudian,

      $\bigcup_{y,z\in Y} \theta(y,z) =$
      $\theta(a,a) \cup \theta(a,b) \cup \theta(b,a) \cup (b,b)$

      $= \{a,b\} \cup \{a\} \cup \{a\} \cup \{a,b\}$
      $= \{a,b\}$
      sehingga $\theta(a,a) = \bigcup_{y,z\in Y} \theta(y,z)$.

   2) Untuk $(b,b) \in Y \times Y$.
      $\theta(b,b) = \{a,b\}$.
      Kemudian,

      $\bigcup_{y,z\in Y} \theta(y,z) =$
      $\theta(a,a) \cup \theta(a,b) \cup \theta(b,a) \cup (b,b)$

      $= \{a,b\} \cup \{a\} \cup \{a\} \cup \{a,b\}$
      $= \{a,b\}$
      sehingga $\theta(b,b) = \bigcup_{y,z\in Y} \theta(y,z)$.

   Sehingga, dari 1) dan 2) terbukti bahwa $\theta(x,x) = \bigcup_{y,z\in Y} \theta(y,z)$ dan karena ini berlaku $\forall x,y,z \in Y$ maka terbukti θ bersifat refleksif.

ii. Akan diperlihatkan θ bersifat simetris, yaitu akan ditunjukkan $\theta(x,y) = \theta(y,x)$ $\forall x,y \in Y$.

   Karena
   $Y \times Y = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$, maka

   1) Untuk $(a,a) \in Y \times Y$.
      $\theta(a,a) = \{a,b\} = \theta(a,a)$.
   2) Untuk $(a,b) \in Y \times Y$.
      $\theta(a,b) = \{a\} = \theta(b,a)$.
   3) Untuk $(b,a) \in Y \times Y$.
      $\theta(b,a) = \{a\} = \theta(a,b)$.
   4) Untuk $(b,b) \in Y \times Y$.
      $\theta(b,b) = \{a,b\} = \theta(b,b)$.

   Sehingga, dari 1), 2), 3) dan 4) terbukti $\theta(x,y) = \theta(y,x)$ dan karena ini berlaku $\forall x,y \in Y$ maka terbukti θ bersifat simetris.

iii. Akan diperlihatkan θ bersifat transitif, yaitu akan ditunjukkan bahwa $\theta(x,z) \cap \theta(z,y) \subseteq \theta(x,y)$ untuk setiap $x,y,z \in Y$.

   Karena
   $Y \times Y = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$
   sehingga untuk membuktikan θ bersifat transitif, akan ditunjukkan untuk semua pasangan terurut dari $Y \times Y$ yang mungkin untuk dipasangkan dalam bentuk $\theta(x,z) \cap \theta(z,y)$ untuk setiap $x,y,z \in Y$.

   1) Ambil $(a,a) \in Y \times Y$.
      $\theta(a,a) \cap \theta(a,a) = \{a,b\} \cap \{a,b\}$
      $= \{a,b\} \subseteq \theta(a,a) = \{a,b\}$
   2) Ambil $(a,a),(a,b) \in Y \times Y$.
      $\theta(a,a) \cap \theta(a,b) = \{a,b\} \cap \{a\}$
      $= \{a\} \subseteq \theta(a,b) = \{a\}$

   Dengan menggunakan cara yang sama seperti pada pembuktian sebelumnya, dapat juga diperlihatkan :

   $\theta(a,b) \cap \theta(b,a) \subseteq \theta(a,a)$
   $\theta(a,b) \cap \theta(b,b) \subseteq \theta(a,b)$
   $\theta(b,a) \cap \theta(a,a) \subseteq \theta(b,a)$,
   $\theta(b,a) \cap \theta(a,b) \subseteq \theta(b,b)$,

$\theta(b,b) \cap \theta(b,a) \subseteq \theta(b,a)$ dan
$\theta(b,b) \cap \theta(b,b) \subseteq \theta(b,b)$.

Sehingga dari pembuktian di atas terbukti bahwa $\theta(x,z) \cap \theta(z,y) \subseteq \theta(x,y)$ dan karena ini berlaku untuk setiap $x,y,z \in Y$ maka terbukti bahwa θ bersifat transitif.

Sehingga dari i, ii dan iii terbukti bahwa θ merupakan relasi ekuivalensi hiper pada Y x Y.

Contoh 2.8

Misal diberikan $Y = \Re^+$ dan dibuat pengkaitan θ dari Y x Y ke $P^*(Y)$ seperti berikut ini

$$\theta(x,y) = \begin{cases} \Re^+ & \text{jika } x = y \\ [0, \min(x,y)] & \text{jika } x \neq y \end{cases}$$

Pengkaitan di atas mendefinisikan pemetaan $\theta: Y \text{ x } Y \longrightarrow P^*(Y)$ karena $\forall(x,y) \in Y \text{ x } Y$ dipasangkan tepat satu dengan unsur dari $P^*(Y)$ sehingga θ merupakan relasi hiper pada Y x Y. Lebih lanjut θ dapat diperlihatkan sebagai relasi ekuivalensi hiper pada Y x Y seperti diperlihatkan pada pembuktian berikut ini.

i. Akan diperlihatkan θ bersifat refleksif, yaitu akan ditunjukkan bahwa $\theta(x,x) = \bigcup_{y,z \in Y} \theta(y,z)$, $x,y,z \in Y$.
   Selanjutnya untuk membuktikan θ bersifat refleksif, hanya akan ditunjukkan untuk setiap $(x,y) \in Y \text{ x } Y$ dengan $x = y$ atau untuk setiap $(x,x) \in Y \text{ x } Y$.
   Karena $x = y$ sehingga $\theta(x,y) = \theta(x,x) = \Re^+$.
   Kemudian $\bigcup_{y,z \in Y} \theta(y,z) = \Re^+$ sehingga $\theta(x,x) = \bigcup_{y,z \in Y} \theta(y,z)$.
   Karena ini berlaku untuk setiap $x,y,z \in Y$ maka terbukti bahwa θ bersifat refleksif.
ii. Akan diperlihatkan θ bersifat simetris, yaitu akan ditunjukkan bahwa $\theta(x,y) = \theta(y,x)$ untuk setiap $x,y \in Y$ seperti berikut ini.
   1) Untuk $(x,y) \in Y \text{ x } Y$ dengan $x = y$ atau untuk $(x,x) \in Y \text{ x } Y$
      $\theta(x,x) = \Re^+ = \theta(x,x)$
   2) Untuk $(x,y) \in Y \text{ x } Y$ dengan $x \neq y$
      $\theta(x,y) = [0, \min(x,y)] = [0, \min(y,x)] = \theta(y,x)$

   Dari 1) dan 2) terbukti $\theta(x,y) = \theta(y,x)$ dan karena ini berlaku untuk setiap $x,y \in Y$ maka terbukti bahwa θ bersifat simetris.
iii. Akan diperlihatkan θ bersifat transitif, yaitu akan ditunjukkan bahwa $\theta(x,z) \cap \theta(z,y) \subseteq \theta(x,y)$, $\forall x,y,z \in Y$.
   Selanjutnya untuk membuktikan θ bersifat transitif, akan ditunjukkan untuk enam pasangan terurut dari Y x Y yang mungkin untuk dipasangkan dalam bentuk $\theta(x,z) \cap \theta(z,y)$ untuk setiap $x,y,z \in Y$.
   1) Ambil $(x,x) \in Y \text{ x } Y$.
      $\theta(x,x) \cap \theta(x,x) = \Re^+ \cap \Re^+ = \Re^+ \subseteq \theta(x,x) = \Re^+$
   2) Ambil $(x,x),(x,y) \in Y \text{ x } Y$.
      $\theta(x,x) \cap \theta(x,y) = \Re^+ \cap [0, \min(x,y)] = [0, \min(x,y)] \subseteq \theta(x,y) = [0, \min(x,y)]$
   3) Ambil $(x,y),(y,y) \in Y \text{ x } Y$.
      $\theta(x,y) \cap \theta(y,y) = [0, \min(x,y)] \cap \Re^+ = [0, \min(x,y)] \subseteq \theta(x,y) = [0, \min(x,y)]$
   4) Ambil $(x,y),(y,x) \in Y \text{ x } Y$.
      $\theta(x,y) \cap \theta(y,x) = [0, \min(x,y)] \cap [0, \min(y,x)] = [0, \min(x,y)] \subseteq \theta(x,x) = \Re^+$
   5) Ambil $(x,y),(y,z) \in Y \text{ x } Y$.
      $\theta(x,y) \cap \theta(y,z) = [0, \min(x,y)] \cap [0, \min(y,z)] = [0, \min(x,y,z)] \subseteq \theta(x,z) = [0, \min(x,z)]$

   Sehingga, dari 1) sampai 5) terbukti bahwa $\theta(x,z) \cap \theta(z,y) \subseteq \theta(x,y)$ dan karena ini berlaku untuk setiap $x,y,z \in Y$ maka terbukti bahwa θ bersifat transitif.

Jadi, dari i, ii dan iii terbukti bahwa θ merupakan relasi ekuivalensi hiper pada Y x Y.

Kemudian jika pada Definisi 2.15 diambil Y suatu BCK-aljabar hiper dan $\forall u,x,y \in X$ berlaku $\theta(u \circledast x, u \circledast y) \supseteq \theta(x,y)$ maka akan diperoleh definisi dari relasi kongruensi hiper sebagaimana diberikan oleh definisi dibawah ini.

Definisi 2.18 [1] Misalkan X suatu BCK-aljabar hiper dan θ suatu relasi ekuivalensi hiper pada $X \text{ x } X$. Relasi ekuivalensi hiper θ tersebut dikatakan suatu relasi kongruensi hiper pada $X \text{ x } X$ jika untuk setiap $u,x,y \in X$ berlaku $\theta(u \circledast x, u \circledast y) \supseteq \theta(x,y)$.

Contoh 2.9

Berdasarkan Contoh 2.3, telah diperlihatkan $X = \{0,a,b,c\}$ suatu BCK-aljabar hiper terhadap operasi hiper $\circledast$ pada X seperti yang didefinisikan pada Tabel 2.2. Dari $X = \{0,a,b,c\}$ diperoleh

$X \text{ x } X = \{(0,0),(0,a),(0,b),(0,c),(a,0),(a,a),$
$(a,b),(a,c),(b,0),(b,a),(b,b),(b,c),(c,0),$
$(c,a),(c,b),(c,c)\}$

dan $P^*(X) = \{\{0\},\{a\},\{b\},\{c\},\{0,a\},\{0,b\},$
$\{0,c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{0,a,b\},\{0,a,c\},$
$\{0,b,c\},\{a,b,c\},\{0,a,b,c\}\}$.

Kemudian dibuat pengkaitan θ dari $X \text{ x } X$ ke $P^*(X)$ seperti dibawah ini.

$(0,0) \longmapsto \{0,a,b,c\}$, $(0,a) \longmapsto \{0,a\}$,
$(0,b) \longmapsto \{0,a\}$, $(0,c) \longmapsto \{0,a\}$,
$(a,0) \longmapsto \{0,a\}$, $(a,a) \longmapsto \{0,a,b,c\}$,
$(a,b) \longmapsto \{0,a\}$, $(a,c) \longmapsto \{0,a\}$,
$(b,0) \longmapsto \{0,a\}$, $(b,a) \longmapsto \{0,a\}$,
$(b,b) \longmapsto \{0,a,b,c\}$, $(b,c) \longmapsto \{0,a\}$,
$(c,0) \longmapsto \{0,a\}$, $(c,a) \longmapsto \{0,a\}$,
$(c,b) \longmapsto \{0,a\}$ dan $(c,c) \longmapsto \{0,a,b,c\}$.

maka pengkaitan di atas mendefinisikan pemetaan $\theta: X \text{ x } X \longrightarrow P^*(X)$, lebih lanjut θ merupakan relasi hiper pada $X \text{ x } X$.

Kemudian lebih lanjut θ merupakan relasi ekuivalensi hiper pada $X \text{ x } X$ karena dengan menggunakan pengkaitan yang telah dibuat, dapat ditunjukkan bahwa θ bersifat refleksif, simetris dan transitif untuk setiap $x,y,z \in X$.

Selanjutnya dengan menggunakan pengkaitan yang telah dibuat tersebut, juga dapat diperlihatkan bahwa relasi ekuivalensi hiper θ tersebut merupakan relasi kongruensi hiper pada $X \text{ x } X$ karena untuk setiap $u,x,y \in X$ berlaku $\theta(u \circledast x, u \circledast y) \supseteq \theta(x,y)$.

Selanjutnya akan diberikan keterkaitan dari relasi ekuivalensi hiper dengan relasi kongruensi hiper.

Teorema 2.19 [1] Misalkan X suatu BCK-aljabar hiper dan θ suatu relasi ekuivalensi hiper pada $X \text{ x } X$. Jika untuk setiap $x_1,x_2,y_1,y_2 \in X$ berlaku $\theta(x_1 \circledast x_2, y_1 \circledast y_2) \supseteq \theta(x_1,y_1) \cap \theta(x_2,y_2)$ maka θ suatu relasi kongruensi hiper pada $X \text{ x } X$.

Bukti:

Misalkan X suatu BCK-aljabar hiper dan θ suatu relasi ekuivalensi hiper pada $X \text{ x } X$.

Ambil $x_1,x_2,y_1,y_2 \in X$ dan

$\theta(x_1 \circledast x_2, y_1 \circledast y_2) \supseteq \theta(x_1,y_1) \cap \theta(x_2,y_2)$.

Misalkan $x_1 = y_1$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \theta(x_1 \circledast x_2, y_1 \circledast y_2) &= \theta(x_1 \circledast x_2, x_1 \circledast y_2) \\ &\supseteq \theta(x_1,x_1) \cap \theta(x_2,y_2) \end{aligned}$$

Dengan menggunakan Definisi 2.17 no.i diperoleh

$$\begin{aligned} \theta(x_1 \circledast x_2, y_1 \circledast y_2) &= \theta(x_1 \circledast x_2, x_1 \circledast y_2) \\ &\supseteq \bigcup_{y,z \in X} \theta(y,z) \cap \theta(x_2,y_2) \\ &\supseteq \theta(x_2,y_2) \end{aligned}$$

Karena berlaku $\theta(x_1 \circledast x_2, y_1 \circledast y_2) \supseteq \theta(x_2,y_2)$ untuk setiap $x_1,x_2,y_1,y_2 \in X$ dengan $x_1 = y_1$ maka terbukti bahwa θ merupakan suatu relasi kongruensi hiper pada $X \text{ x } X$.

PENUTUP

Dari pembahasan yang telah diuraikan dapat diperoleh beberapa hal, yaitu

1. BCK-aljabar hiper dapat dipandang sebagai BCK-aljabar dimana peran operasi biner yang berlaku pada BCK-aljabar diambil alih oleh operasi hiper yang berlaku pada BCK-aljabar hiper. Kemudian karena operasi hiper merupakan pemetaan dari himpunan ke keluarga himpunan sehingga operasi hiper yang berlaku pada BCK-aljabar hiper merupakan perumuman dari operasi biner yang berlaku pada BCK-aljabar".

2. Relasi hiper yang berlaku pada suatu himpunan tidak kosong yang memenuhi sifat refleksif, simetris dan transitif akan membentuk relasi ekuivalensi hiper. Kemudian relasi ekuivalensi hiper yang berlaku pada suatu BCK-aljabar hiper yang memenuhi syarat tertentu akan membentuk relasi kongruensi hiper.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bolurian, M. and A. Hasankhani,1997, *Hyper BCK-Algebra*, Ratio Mathematica **12** : hal. 97-106. (16 Januari 2010).

[2] Lee, Kyoung Ja and Young Bae Jun, 2009, *Semi-Homomorphisms Of BCK-Algebras*, Journal Of The Chungcheong Mathematical Society , Vol.22 No.2 : hal. 131 -139. http://www.ccms.or.kr/data/pdfpaper/jcms22_2/22_2_131.pdf (19 Maret 2010).