

MEMBANGUN KODE GOLAY (24, 12, 8) DENGAN MATRIKS GENERATOR DAN MENGGUNAKAN KRITERIA PERMUTASI

Bambang Irawanto, Ikhsan Rizki K
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

ABSTRACT—One of the more useful block codes is the binary (24, 12, 8) extended Golay code. The binary (24, 12, 8) extended Golay code can be constructed through the direct sum operation with involve two product codes. This method form the generator matrix framework of the (24, 12, 8) Golay code that is based on the so-called Turyn or $|a + x|b + x|a + b + x|$ construction, where $a, b \in C_1$ and $x \in C_1'$. C_1 and C_1' is the (8, 4, 4) linear block codes. C_1' can be gotten through row permutation of the parity submatrix of C_1 . With C_1 and C_1' and by applying the generator matrix framework of the (24, 12, 8) Golay code get the binary (24, 12, 8) extended Golay code..

Keyword : Block codes, direct sum, Golay Code, product codes.

PENDAHULUAN

Kode Golay biner (24, 12, 8) dinotasikan C_{24} , adalah salah satu kode blok linier yang bermanfaat untuk mengoreksi kesalahan (*error*) dalam komunikasi digital. Kode Golay ini dibentuk dari kode Golay biner (23, 12, 7) dengan menambah sebuah bit pemeriksa. Kode Golay (24, 12, 8) dapat mengoreksi 3 *error* dan mendeteksi 4 *error*.

Ada beberapa metode yang dapat digunakan untuk membangun C_{24} . C_{24} dapat dibangun oleh *Lexicographic code* dengan panjang 24, *Quadratic residu code* dan *Miracle Octad Generator* [6]. Selain itu C_{24} juga dapat dibangun dengan komponen kode dengan panjang dan dimensi yang lebih kecil. Dalam tulisan ini, C_{24} dibangun berdasarkan *direct sum* dari dua *product* kode dengan melibatkan 4 komponen kode yaitu : sebuah (3, 2, 2) *Single Parity Check Code*, sebuah kode pengulangan (3, 1, 3), dan dua buah kode blok linier (8, 4, 4). Kontruksi dalam metode ini menerapkan kerangka $|a + x|b + x|a + b + x|$ dengan menggunakan dua kode blok linier (8, 4, 4). Satu dari dua kode linier (8, 4, 4) yang digunakan disini didapat dari permutasi baris dari kode (8, 4, 4) yang asli. Permutasi baris tersebut akan menghasilkan 6 kode linier (8, 4, 4) yang baru dan ekuivalen (mempunyai distribusi bobot yang sama) tetapi mewakili subruang kode yang berbeda dengan kode (8, 4, 4) yang asli. Dengan memberi kode (8, 4, 4), bersamaan dengan satu dari 6 kode (8, 4, 4) yang dihasilkan, dalam semua kasus menghantar untuk membangun kode Golay (24, 12, 8). Perlu

dicatat kedua kode (8, 4, 4) yang digunakan disini keduanya adalah kode yang sistematis.

METODE PEMBANGUN

Dalam metode ini, akan dibagi 2 sub-bab yaitu; kerangka matriks generator dan kriteria permutasi untuk mendapatkan kode yang digunakan untuk menyusun kerangka matriks generator tersebut.

A. Kerangka Matriks Generator

Dua *product* kode yang digunakan disini adalah dua *product* kode yang berbeda. Sebuah *product* kode C dibentuk sebagai hasil kali langsung (*direct product*) dari 2 komponen kode, misalnya kode $C_1(n_1, k_1, d_1)$ dengan matriks generator G_1 dan kode $C_2(n_2, k_2, d_2)$ generator G_2 . Matriks generator G dari kode C , dihasilkan oleh *Product Kronecker* (dinotasikan oleh $\otimes$) matriks generator G_1 dengan G_2 , yaitu :

$$G = G_1 \otimes G_2 = (g_{i,j}^{(1)} G_2)$$

atau

$$G = G_2 \otimes G_1 = (g_{i,j}^{(2)} G_1) \quad (1)$$

dimana $G_1 = (g_{i,j}^{(1)})$, $G_2 = (g_{i,j}^{(2)})$.

Direct product diatas menghasilkan *product* kode $C(n_1 n_2, k_1 k_2, d_1 d_2)$ dengan matriks generator G yang berukuran $(k_1 k_2) \times (n_1 n_2)$.

Kode C yang pertama adalah *product* kode $C(24, 8, 8)$ yang dibentuk oleh $C = C_1 \times C_2$, dimana C_1 adalah kode blok linier (8, 4, 4) dan C_2 adalah (3, 2, 2) *Single Parity Check Code*. Matriks generator dari C_2 adalah:

MEMBANGUN KODE GOLAY (24, 12, 8) DENGAN MATRIKS GENERATOR DAN MENGGUNAKAN KRITERIA PERMUTASI

Bambang Irawanto, Ikhsan Rizki K
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

ABSTRACT—One of the more useful block codes is the binary (24, 12, 8) extended Golay code. The binary (24, 12, 8) extended Golay code can be constructed through the direct sum operation with involve two product codes. This method form the generator matrix framework of the (24, 12, 8) Golay code that is based on the so-called Turyn or $|a + x|b + x|a + b + x|$ construction, where $a, b \in C_1$ and $x \in C'_1$. C_1 and C'_1 is the (8, 4, 4) linear block codes. C'_1 can be gotten through row permutation of the parity submatrix of C_1 . With C_1 and C'_1 and by applying the generator matrix framework of the (24, 12, 8) Golay code get the binary (24, 12, 8) extended Golay code..

Keyword : Block codes, direct sum, Golay Code, product codes.

PENDAHULUAN

Kode Golay biner (24, 12, 8) dinotasikan C_{24} , adalah salah satu kode blok linier yang bermanfaat untuk mengoreksi kesalahan (*error*) dalam komunikasi digital. Kode Golay ini dibentuk dari kode Golay biner (23, 12, 7) dengan menambah sebuah bit pemeriksa. Kode Golay (24, 12, 8) dapat mengoreksi 3 *error* dan mendeteksi 4 *error*.

Ada beberapa metode yang dapat digunakan untuk membangun C_{24} . C_{24} dapat dibangun oleh *Lexicographic code* dengan panjang 24, *Quadratic residu code* dan *Miracle Octad Generator* [6]. Selain itu C_{24} juga dapat dibangun dengan komponen kode dengan panjang dan dimensi yang lebih kecil. Dalam tulisan ini, C_{24} dibangun berdasarkan *direct sum* dari dua *product* kode dengan melibatkan 4 komponen kode yaitu : sebuah (3, 2, 2) *Single Parity Check Code*, sebuah kode pengulangan (3, 1, 3), dan dua buah kode blok linier (8, 4, 4). Kontruksi dalam metode ini menerapkan kerangka $|a + x|b + x|a + b + x|$ dengan menggunakan dua kode blok linier (8, 4, 4). Satu dari dua kode linier (8, 4, 4) yang digunakan disini didapat dari permutasi baris dari kode (8, 4, 4) yang asli. Permutasi baris tersebut akan menghasilkan 6 kode linier (8, 4, 4) yang baru dan ekuivalen (mempunyai distribusi bobot yang sama) tetapi mewakili subruang kode yang berbeda dengan kode (8, 4, 4) yang asli. Dengan memberi kode (8, 4, 4), bersamaan dengan satu dari 6 kode (8, 4, 4) yang dihasilkan, dalam semua kasus menghantar untuk membangun kode Golay (24, 12, 8). Perlu

dicatat kedua kode (8, 4, 4) yang digunakan disini keduanya adalah kode yang sistematis.

METODE PEMBANGUN

Dalam metode ini, akan dibagi 2 sub-bab yaitu; kerangka matriks generator dan kriteria permutasi untuk mendapatkan kode yang digunakan untuk menyusun kerangka matriks generator tersebut.

A. Kerangka Matriks Generator

Dua *product* kode yang digunakan disini adalah dua *product* kode yang berbeda. Sebuah *product* kode C dibentuk sebagai hasil kali langsung (*direct product*) dari 2 komponen kode, misalnya kode $C_1(n_1, k_1, d_1)$ dengan matriks generator G_1 dan kode $C_2(n_2, k_2, d_2)$ generator G_2 . Matriks generator G dari kode C , dihasilkan oleh *Product Kronecker* (dinotasikan oleh $\otimes$) matriks generator G_1 dengan G_2 , yaitu :

$$G = G_1 \otimes G_2 = (g_{i,j}^{(1)} G_2)$$

atau

$$G = G_2 \otimes G_1 = (g_{i,j}^{(2)} G_1) \quad (1)$$

dimana $G_1 = (g_{i,j}^{(1)})$, $G_2 = (g_{i,j}^{(2)})$.

Direct product diatas menghasilkan *product* kode $C(n_1 n_2, k_1 k_2, d_1 d_2)$ dengan matriks generator G yang berukuran $(k_1 k_2) \times (n_1 n_2)$.

Kode C yang pertama adalah *product* kode $C(24, 8, 8)$ yang dibentuk oleh $C = C_1 \times C_2$, dimana C_1 adalah kode blok linier (8, 4, 4) dan C_2 adalah (3, 2, 2) *Single Parity Check Code*. Matriks generator dari C_2 adalah:

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan (1), matriks generator G dari C diberikan oleh :

$$G = G_2 \otimes G_1 = \begin{pmatrix} G_1 & 0 & G_1 \\ 0 & G_1 & G_1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

dimana G_1 adalah matriks generator dari kode C_1 berukuran 4×8 , dan '0' mewakili matriks nol 4×8 .

Kode C' yang kedua adalah *product* kode (24, 4, 12) dibentuk oleh $C' = C_1' \times C_2'$, dimana C_1' adalah satu dari 6 kode (8, 4, 4) yang baru dan C_2' adalah kode pengulangan (3, 1, 3). Matriks generator dari C_2' :

$$G_2' = (1 \ 1 \ 1).$$

Berdasarkan (1), matriks generator dari C' diberikan oleh :

$$G' = G_2' \otimes G_1' = (G_1' \ G_1' \ G_1') \quad (3)$$

dimana G_1' adalah matriks generator dari C_1' berukuran 4×8 dan diperoleh dari permutasi baris G_1 .

Definisi 1 [5]

Jika U dan V adalah subruang vektor dari sebuah ruang vektor sedemikian sehingga $U \cap V = \{0\}$ maka $U + V$ adalah *direct sum* atau konstruksi $|u+v|$ dari U dan V , yang dinotasikan $U \oplus V$.

Menurut [3], kode C (24, 8) dan C' (24, 4) merupakan subruang dari ruang vektor V_{24} .

Misalkan $\hat{C} = C \oplus C'$ adalah sub-ruang kode dengan panjang 24 yang dibentuk oleh C dan C' . Jika $C \cap C' = \{0\}$ maka setiap kodekata $\hat{\alpha}$ didalam $\hat{C}$ dapat dinyatakan sebagai penjumlahan

$$\hat{\alpha} = \alpha + \alpha'$$

dimana $\alpha \in C$ dan $\alpha' \in C'$.

Lemma 1

Subruang kode $\hat{C}$ dapat dibentuk sebagai *direct sum* atau konstruksi $|u+v|$ dari C dan C' .

Bukti :

Untuk membuktikan $C \cap C' = \{0\}$, jadi akan ditunjukkan bahwa untuk sembarang $\alpha \in C$ dan $\alpha' \in C'$, $\alpha + \alpha' = 0$ hanya berlaku untuk $\alpha = 0$ dan $\alpha' = 0$. Berdasarkan pers (2) dan (3) kodekata α dapat dinyatakan sebagai $(a, 0, a)$, $(0, b, b)$ atau $(a, b, a+b)$, dimana $a, b \in C_1$, dan kodekata α' juga dapat dinyatakan sebagai (x, x, x) dimana $x \in C_1'$. Andaikan bahwa $\alpha + \alpha' = 0$. Maka kita mempunyai :

$$\alpha + \alpha' = (a+x, x, a+x) = 0 \quad (i)$$

$$= (x, b+x, b+x) = 0 \quad (ii)$$

$$= (a+x, b+x, a+b+x) = 0 \quad (iii)$$

Dari pers (iii), ini menyiratkan bahwa $a+x = 0$, $b+x = 0$ dan $a+b+x = 0$. Dengan mudah dapat disimpulkan bahwa $a = 0$, $b = 0$, $x = 0$, dan dari (i) dan (ii) juga dapat disimpulkan bahwa $a = 0$, $b = 0$, $x = 0$. Sehingga mengakibatkan $\alpha = 0$ dan $\alpha' = 0$. Karena terpenuhi bahwa $\alpha + \alpha' = 0$ hanya terpenuhi

oleh $\alpha = 0$ dan $\alpha' = 0$ maka $\hat{C}$ dapat dibentuk sebagai *direct sum* dari C dan C' .

Berdasarkan lemma diatas kita dapat menganggap bahwa kodekata $\hat{\alpha}$ didalam $\hat{C}$ dapat dinyatakan sebagai penjumlahan

$$\hat{\alpha} = \alpha + \alpha'$$

Sehingga kode $\hat{C}$ dapat dinyatakan sebagai :

$$\hat{C} = C \oplus C' = \{(c_1 + c_2) : c_1 \in C, c_2 \in C'\}$$

dengan dimensi :

$$\begin{aligned} \dim(\hat{C}) &= \dim(C) + \dim(C') \\ &= 8 + 4 = 12. \end{aligned}$$

Matriks generator $\hat{G}$ dari $\hat{C}$ kemudian diberikan oleh :

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} G \\ G' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 & 0 & G_1 \\ 0 & G_1 & G_1 \\ G_1' & G_1' & G_1' \end{pmatrix} \quad (4)$$

Berdasarkan pers (4) diatas bahwa $\hat{C}$ adalah sebuah $\hat{C}$ (n, k) yaitu kode Linier (24, 12). Setiap kodekata dalam $\hat{C}$ mempunyai bentuk :

$$\hat{c} = |a + x|b + x|a + b + x|$$

dimana $a, b \in C_1$ dan $x \in C_1'$ yang merupakan kasus dari *Turyn construction* [6]. Jarak minimum kode $\hat{C}$ bergantung pada struktur kode C_1 dan kode C_1' yang diwakili oleh matriks generator G_1 dan G_1' .

Diberikan C_1 adalah kode linier (8, 4, 4) yang sistematis, sehingga matriks generator G_1 dari kode C_1 dapat dinyatakan :

$$G_1 = (I_4 \ P) \quad (5)$$

dimana I_4 adalah matrik identitas 4×4 dan P adalah sub matrik parity 4×4 dari G_1 . Elemen dari P dapat dinyatakan sebagai vektor baris, yaitu :

$$P = (P_1, P_2, P_3, P_4)^T$$

dimana $P_i, i = 1, 2, 3, 4$ adalah pilihan tunggal (*uniquely*) dari himpunan $S = \{(1 \ 1 \ 1 \ 0), (1 \ 1 \ 0 \ 1), (1 \ 0 \ 1 \ 1), (0 \ 1 \ 1 \ 1)\}$ dalam suatu urutan [6].

Semua himpunan S terdiri dari 4-tuple dengan bobot Hamming 3. Dengan demikian akan membentuk kode blok linier $C_1(8, 4, 4)$ dengan distribusi bobot kodenya : $\{N(0) = 1, N(4) = 14, \text{ dan } N(8) = 1\}$, dimana $N(x)$ menyatakan banyaknya kodekata dengan bobot x [6].

B. Kriteria Permutasi

Kode linier $C_1' (8, 4, 4)$ yang dihasilkan disini adalah kode yang sistematis, matriks generatornya dinyatakan oleh :

$$G_1' = (I_4 \ P') \quad (6)$$

dimana P' adalah sub matriks parity dari G_1' . $P' = (P'_1, P'_2, P'_3, P'_4)^T$ akan dihasilkan melalui permutasi baris dari P yang merupakan sub matriks parity dari G_1 . Sehingga permutasi baris yang terkait disini hanya berlangsung pada sub matriks parity dari G_1 . Dengan cara ini akan mengubah struktur sub ruang kode C_1 dan akibatnya akan menghasilkan kode C_1' baru. Kode C_1' yang baru ini ekuivalen dengan kode C_1 , sehingga mempunyai distribusi bobot kode yang sama. Sub matriks parity P' sebagai permutasi P harus memenuhi kriteria dibawah ini :

1. Kriteria pertama

$$P'_i \neq P_i \text{ untuk } 1 \leq i \leq 4$$

2. Kriteria kedua

$$\{P'_i, P'_j\} \neq \{P_i, P_j\}$$

$$\text{untuk } 1 \leq i, j \leq 4 \text{ dan } i < j.$$

Dengan cara ini akan menjamin bahwa *subset* dari dua baris dalam P' tidak identik dengan *subset* yang bersesuaian dari dua baris didalam P .

Contoh 1 :

Misalkan diberikan sub matriks parity P berukuran 4×4 dari G_1 , $P = (P_1, P_2, P_3, P_4)^T$.

Maka sub matriks parity dari G_1' ,

$$P' = (P'_1, P'_2, P'_3, P'_4)^T \text{ harus memenuhi}$$

kriteria permutasi diatas. Permutasi baris dari P menghasilkan $4! = 24$ kemungkinan P' yang baru. Menurut kriteria pertama bahwa $P'_i \neq P_i$ sehingga kita tinggal mempunyai 9

kemungkinan P' yang baru, yaitu :

$$P'_{(1)} = (P_2, P_3, P_4, P_1)^T$$

$$P'_{(2)} = (P_2, P_4, P_1, P_3)^T$$

$$P'_{(3)} = (P_3, P_1, P_4, P_2)^T$$

$$P'_{(4)} = (P_3, P_4, P_2, P_1)^T$$

$$P'_{(5)} = (P_4, P_1, P_2, P_3)^T$$

$$P'_{(6)} = (P_4, P_3, P_1, P_2)^T$$

$$P'_{(7)} = (P_2, P_1, P_4, P_3)^T$$

$$P'_{(8)} = (P_3, P_4, P_1, P_2)^T$$

$$P'_{(9)} = (P_4, P_3, P_2, P_1)^T$$

Dan berdasarkan kriteria kedua bahwa $\{P'_i, P'_j\} \neq \{P_i, P_j\}$ untuk $1 \leq i, j \leq 4$ dan $i < j$, akhirnya kita hanya mempunyai 6 kemungkinan P' yang baru, yaitu :

$$P'_{(1)} = (P_2, P_3, P_4, P_1)^T$$

$$P'_{(2)} = (P_2, P_4, P_1, P_3)^T$$

$$P'_{(3)} = (P_3, P_1, P_4, P_2)^T$$

$$P'_{(4)} = (P_3, P_4, P_2, P_1)^T$$

$$P'_{(5)} = (P_4, P_1, P_2, P_3)^T$$

$$P'_{(6)} = (P_4, P_3, P_1, P_2)^T$$

Dengan demikian jika diberikan matriks generator $G_1 = (I_4 \ P)$ maka akan menghasilkan 6 $G'_1 = (I_4 \ P')$ baru yang berbeda, dengan P' diambil salah satu dari 6 P' diatas. Enam G'_1 tersebut misalnya $G'_{(1)}$, $G'_{(2)}$, $G'_{(3)}$, $G'_{(4)}$, $G'_{(5)}$, dan $G'_{(6)}$.

Lemma 2 [6]

Semua kodekata dengan bobot 4 dari C_1 dan C'_1 adalah berbeda.

Bukti :

Kodekata dengan bobot 4 dari kode C_1 (8, 4, 4) dan C'_1 (8, 4, 4) dihasilkan oleh kombinasi linier 1, 2, atau 3 baris dari matriks generator kode C_1 dan C'_1 secara bersamaan. Kodekata dengan bobot 4 dari kode C_1 dan C'_1 berbeda jika hasil kombinasi linier baris dari matriks generator kode C_1 dengan C'_1 berbeda.

Karena kode C_1 dan C'_1 merupakan kode yang sistematis sehingga mempunyai matriks identitas I_4 maka kita harus membuktikan bahwa kombinasi linier dari sub matriks parity P berbeda dengan kombinasi linier dari sub matriks parity P' .

Berdasarkan kriteria pertama dan kriteria kedua, kombinasi linier yang melibatkan 1 dan 2 baris dari dari sub matriks parity P berbeda dengan kombinasi linier dari sub matriks parity P' . Kombinasi linier yang melibatkan 3 baris akan memberikan 4 kodekata. Berdasarkan kriteria pertama akan mengakibatkan

$$\{P'_i, P'_j, P'_l\} \neq \{P_i, P_j, P_l\}$$

dimana $i, j, l = 1, 2, 3, 4$ dan $i < j < l$.

Sehingga kombinasi linier yang melibatkan 3 baris dari dari sub matriks parity P akan berbeda dengan kombinasi linier yang melibatkan 3 baris dari sub matriks parity P' . Jadi semua kodekata dengan bobot 4 dari kode C_1 (8, 4, 4) dengan C'_1 (8, 4, 4) berbeda.

Teorema 1 [6]

Kode $\hat{C}$ dibangun oleh (4), dengan G_1 diberikan oleh pers (5) dan G'_1 oleh pers (6) yang memenuhi kriteria permutasi adalah sebuah kode linier (24, 12, 8) yaitu perluasan kode Golay biner (C_{24}).

Bukti :

Karena kode C dan C' keduanya linier maka penjumlahan dari kode tersebut juga linier. Kode $\hat{C}$ jelas merupakan kode linier karena $\hat{C}$ adalah penjumlahan langsung dari C dan C' . Dengan hasil yang diberikan oleh lemma 1 yang diwakili oleh persamaan (4), kode $\hat{C}$ adalah sebuah kode linier (24, 12).

Sekarang hanya butuh untuk membuktikan jarak minimum dari $\hat{C}$ adalah 8. Jarak minimum dari suatu kode linier sama dengan bobot minimumnya.

Bobot minimum $\hat{C}$ bergantung pada struktur C_1 dan C'_1 . Struktur dari kodekata $\hat{C}$, $\hat{c} = (a+x, b+x, a+b+x)$ dimana $e \in C_1$, untuk $e = \{a, b, a+b\}$ dan $x \in C'_1$. Bobot kodekata $\hat{c}$, $wt(\hat{c}) = wt(a+x) + wt(b+x) + wt(a+b+x)$ dimana $wt(e+x) = wt(e) + wt(x) - wt(e \cap x)$. Bobot kedua kodekata C_1 dan C'_1 adalah 0, 4, atau 8. Untuk $wt(e) = wt(x) = 4$, berdasarkan lemma 2 didapat $wt(e \cap x) \leq 3$, sehingga $wt(e+x) \geq 2$. Ada banyak kasus dalam mencari bobot dari kodekata $\hat{c}$, kita akan membagi menjadi 2 bagian :

- Bagian yang pertama $wt(e) = wt(x) = 4$ dengan $a \neq b$. Pada bagian ini mempunyai 2 sub-kasus, yaitu :
 1. jika $wt(a+x) = 2$ dan $wt(b+x) = 2$, maka kondisi $wt(a+b) = 4$ mengakibatkan $wt(a+b \cap x) = 2$ sehingga memastikan bahwa $wt(a+b+x) = 4$.

2. jika $wt(a+x) = 2$ dan $wt(b+x) = 4$ atau sebaliknya, maka kondisi $wt(a+b) = 4$ mengakibatkan $wt(a+b \cap x) = 3$ atau

1 sehingga $wt(a+b+x) = 2$ atau 6.

Dalam setiap sub-kasus dapat disimpulkan bahwa $wt(e+x) \geq 2$ sehingga kondisi $wt(\hat{c}) \geq 8$.

• Bagian yang kedua adalah kondisi $wt(e)$ dan $wt(x)$ selain kondisi pada bagian diatas. Pada bagian ini mempunyai 3 sub-kasus, yaitu :

1. jika $wt(a) = wt(b) = wt(x) \neq 4$, mengakibatkan $a = b = x$ sehingga $wt(a+b) = 0$, didapat $wt(a+b+x) = 0$ atau 8. Karena $wt(a \cap x) = 0$ atau 8 maka $wt(a+x) = 0$. Jadi didapat $wt(e+x) = 0$ atau 8 sehingga memenuhi $wt(\hat{c}) \geq 8$.
2. jika $wt(e) \neq wt(x)$, sub-kasus ini mempunyai 3 kemungkinan, yaitu:
 - i. jika $wt(e) = 0$ maka $wt(x) = 4$ atau 8 sehingga $wt(e \cap x) = 0$. Jadi $wt(e+x) = 4$ atau 8.
 - ii. jika $wt(e) = 4$ maka $wt(x) = 0$ atau 8 sehingga $wt(e \cap x) = 0$ atau 4. Jadi $wt(e+x) = 4$.
 - iii. jika $wt(e) = 8$ maka $wt(x) = 0$ atau 4 sehingga $wt(e \cap x) = 0$ atau 4. Jadi $wt(e+x) = 8$ atau 4.

Dari ketiga kemungkinan didapat $wt(e+x) = 4$ atau 8 sehingga memenuhi $wt(\hat{c}) \geq 8$.

3. $wt(e) = wt(x) = 4$ dengan $e \in \{a, b\}$ dan $a = b$.

Kondisi $wt(e \cap x) \leq 3$ berakibat $wt(e+x) \geq 2$. Karena kondisi $a = b$ mengakibatkan $wt(a+b+x) = 4$, jadi kondisi $wt(e+x) \geq 2$ memenuhi $wt(\hat{c}) \geq 8$.

Dari kedua bagian diatas dapat disimpulkan $wt(\hat{c}) \geq 8$, sehingga bobot minimum dari kode $\hat{C}$ adalah 8. Dengan demikian kode $\hat{C}$ adalah sebuah kode linier (24, 12, 8) yaitu kode Golay (24, 12, 8).

Contoh 2:

Misalkan diberikan G_1 sebagai matriks generator dari kode sistematis $C_1(8, 4, 4)$, yaitu :

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{dan } P = \begin{pmatrix} (1 & 1 & 0 & 1) \\ (0 & 1 & 1 & 1) \\ (1 & 1 & 1 & 0) \\ (1 & 0 & 1 & 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix}$$

dan menggunakan hasil yang diberikan pada contoh 1, 6 sub matriks parity yang dihasilkan dari permutasi P , $P_{(r)}$ ($1 \leq r \leq 6$), dan berdasarkan (6) dapat menghasilkan 6 matriks generator G'_1 yang baru yaitu $G'_{(1)}, \dots, G'_{(6)}$ sebagai berikut :

$$P'_{(1)} = \begin{pmatrix} P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0 & 1 & 1 & 1) \\ (1 & 1 & 1 & 0) \\ (1 & 0 & 1 & 1) \\ (1 & 1 & 0 & 1) \end{pmatrix}$$

$$G'_{(1)} = (I_4 \quad P'_{(1)})$$

$$P'_{(2)} = \begin{pmatrix} P_2 \\ P_4 \\ P_1 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0 & 1 & 1 & 1) \\ (1 & 0 & 1 & 1) \\ (1 & 1 & 0 & 1) \\ (1 & 1 & 1 & 0) \end{pmatrix}$$

$$G'_{(2)} = (I_4 \quad P'_{(2)})$$

$$P'_{(3)} = \begin{pmatrix} P_3 \\ P_1 \\ P_4 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 & 1 & 1 & 0) \\ (1 & 1 & 0 & 1) \\ (1 & 0 & 1 & 1) \\ (0 & 1 & 1 & 1) \end{pmatrix}$$

$$G'_{(3)} = (I_4 \quad P'_{(3)})$$

$$P'_{(4)} = \begin{pmatrix} P_3 \\ P_4 \\ P_2 \\ P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 & 1 & 1 & 0) \\ (1 & 0 & 1 & 1) \\ (0 & 1 & 1 & 1) \\ (1 & 1 & 0 & 1) \end{pmatrix}$$

$$G'_{(4)} = (I_4 \quad P'_{(4)})$$

$$P'_{(5)} = \begin{pmatrix} P_4 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 & 0 & 1 & 1) \\ (1 & 1 & 0 & 1) \\ (0 & 1 & 1 & 1) \\ (1 & 1 & 1 & 0) \end{pmatrix}$$

$$G'_{(5)} = (I_4 \ P'_{(5)})$$

$$P'_{(6)} = \begin{pmatrix} P_4 \\ P_3 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 & 0 & 1 & 1) \\ (1 & 1 & 1 & 0) \\ (1 & 1 & 0 & 1) \\ (0 & 1 & 1 & 1) \end{pmatrix}$$

$$G'_{(6)} = (I_4 \ P'_{(6)})$$

Dengan menggunakan kerangka matriks generator yang diberikan oleh pers (4), C_{24} kemudian dibangun dengan menggunakan G_1 diatas dan satu dari 6 G'_1 yang dihasilkan diatas.

SIMPULAN

Kode Golay (24, 12, 8) dapat dibangun dengan sebagai hasil dari *direct sum* 2 komponen kode dengan melibatkan 4 komponen kode. *Direct sum* tersebut

membentuk kerangka matriks generator. Setiap kodekata yang dihasilkan dalam kerangka matriks tersebut merupakan bentuk dari konstruksi *Turyn* atau $|a + x|b + x|a + b + x|$ dimana $a, b \in C_1$ dan $x \in C'_1$, disini C_1 dan C'_1 adalah dua buah kode blok linier (8, 4, 4).

C'_1 sendiri didapat dari permutasi baris pada submatriks parity dari C_1 dengan mengikuti kriteria permutasi.

Disini ada 6 C'_1 baru yang berbeda tetapi semuanya ekuivalen dengan C_1 yang asli. Jadi dengan menggunakan matriks generator G_1 dan satu dari 6 G'_1 yang dihasilkan akan membangun kerangka matriks generator kode Golay (24, 12, 8).

Matriks generator kode Golay (24, 12, 8)

dibangun oleh pers (4) dengan menggunakan G_1 dan $G'_1 = G'_{(3)}$ pada contoh 2

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

DAFTAR PUSTAKA

- [1]. Banerjee, Adrish, 2005, "Some Important Linear Block Codes", <http://home.iitk.ac.in/~adrish/EE321/Lectures/lecture6.pdf>.
- [2]. Milenkovic, Olgica, 2007, "Coding Theory". Urbana-Champaign, <http://courses.ece.uiuc.edu/ece556/fall2007/lectures/Lecture3.pdf>.
- [3]. Vanstone, S.A & Oorschot, P. C, 1989, "An Introduction to Error Correcting Codes with Applications", London, Kluwer Academic Publisher.
- [4]. Whitcomb, Louis L, "Notes on Kronecker Product", the John Hopskin University http://guoqians:sun2066102@fraser.sfu.ca/home/guoqians/pub_html/kron_1.pdf.
- [5]. Wright, Francis J, 2004, "Linear Algebra I Lecture Notes", http://centaur.maths.qmul.ac.uk/LinAlg_I/Lectures_2004/Lectures_2.pdf.
- [6]. X.-H. Peng & P. G. Farrel, 2005, "On Construction of the (24, 12, 8) Golay Codes", Birmingham.