Jurnal Sains & Matematika
Volume 17, Nomor 1 Januari 2009

ISSN 0854-0675
Artikel Penelitian: 8-16

MODEL DINAMIK PENULARAN *HUMAN IMMUNODEFICIENCY VIRUS* (HIV)

Sutimin, Imamudin
Jurusan Matematika Fakultas .MIPA Universitas Diponegoro

ABSTRAK—*Human Immunodeficiency Virus* (HIV) adalah virus yang dapat merusak sistem kekebalan tubuh manusia. Virus HIV dapat menyerang orang yang rentan ketika orang yang rentan itu melakukan kontak dengan penderita virus HIV hingga terinfeksi virus HIV dan pada akhirnya dapat menderita AIDS atau seropositif non-AIDS. Dengan asumsi-asumsi tentang penularan virus HIV dapat diformulasikan suatu model matematika tentang perpindahan antar orang-orang rentan ke infeksi HIV, penderita AIDS dan seropositif non-AIDS. Model matematika yang menjelaskan penyebaran virus HIV dinyatakan dalam sistem persamaan differensial nonlinear, analisa kestabilan titik kesetimbangan dari model digunakan dengan metode Liapunov dan metode pelinearan untuk mengetahui kesetimbangannya model.

Kata Kunci : HIV, AIDS dan Kestabilan,

1. PENDAHULUAN

Human Immunodeficiency Virus (HIV) adalah suatu virus yang menyerang sistem kekebalan tubuh manusia. Cara penularan yang efektif dari virus HIV adalah dengan hubungan seksual dengan penderitanya. Faktanya 71 % cara penularannya adalah dari hubungan kelamin komunitas heteroseksual, 15 % dari komunitas homoseksual dan hanya 14 % dari transfusi darah, penggunaan alat suntik yang terkontaminasi virus HIV dan sebab lain [1]. Kalau suatu populasi ada yang terinfeksi virus HIV, maka sangat mungkin yang terinfeksi bertambah bila sesorang yang terinfeksi berhubungan seksual dengan orang lain pada populasi tersebut.

Virus HIV adalah penyebab dari penyakit *Acquired Immuno Deficiency Sindrome* (AIDS). Ketika pada tubuh seseorang terdeteksi virus HIV maka orang tersebut dapat dikatakan seropositip atau HIV positip. perlu waktu kira-kira 5 sampai 10 tahun orang yang seropositip menjadi pengidap penyakit AIDS. Keganasan AIDS dan kecepatan penyebaran virus HIV sangat membahayakan. Bisa diramalkan bahwa virus HIV akan menjadi epidemik yang sangat serius, bahkan menjadi epidemik yang mendunia, setidaknya di abad ini dan banyak yang menganggapnya seperti *"Black Death"* pada pertengahan abad XIV. [1]

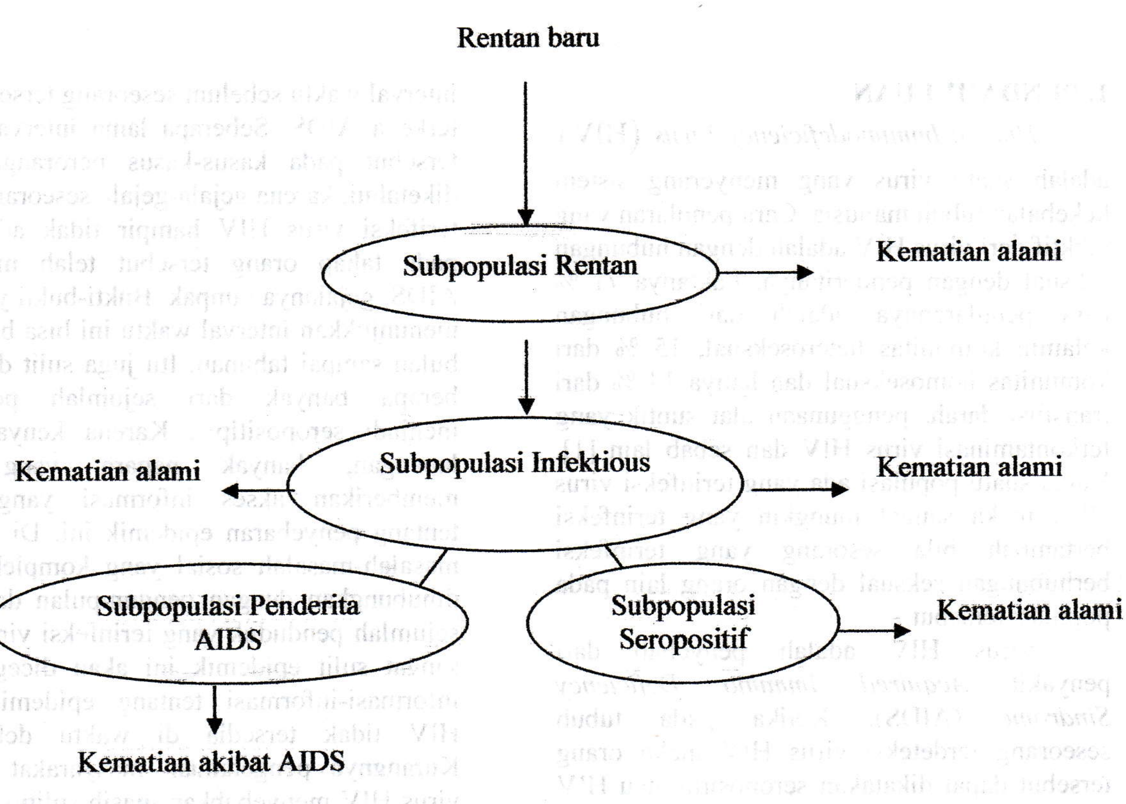
Setelah virus HIV terdeteksi pada tubuh seseorang dan menjadi HIV positip, ada interval waktu sebelum seseorang tersebut total terkena AIDS. Seberapa lama interval waktu tersebut pada kasus-kasus perorangan sulit diketahui, karena gejala-gejala seseorang yang terifeksi virus HIV hampir tidak ada. Baru pada tahap orang tersebut telah mengidap AIDS, gejalanya tampak. Bukti-bukti yang ada menunjukkan interval waktu ini bisa berbulan-bulan sampai tahunan. Itu juga sulit diketahui berapa banyak dari sejumlah penduduk menjadi seropositip . Karena kenyataan di lapangan, banyak negara yang tidak memberikan akses informasi yang benar tentang penyebaran epidemik ini. Di sisi lain masalah-masalah sosial yang kompleks yang dihubungkan dengan pengumpulan data pada sejumlah penduduk yang terinfeksi virus HIV, sangat sulit epidemik ini akan dicegah jika informasi-informasi tentang epidemik virus HIV tidak tersedia di waktu dekat ini. Kurangnya pengetahuan masyarakat tentang virus HIV menyebabkan masih sulitnya dalam merancang cara-cara pencegahan epidemik ini yang efektif. Program penyuluhan seperti bagaimana virus HIV dapat menular merupakan syarat minimal.

Data epidemiologi dari Ditjen PPM dan PL Depkes RI, secara kumulatif pengidap infeksi HIV dan penderita AIDS dari April 1987 sampai dengan 30 Juni 2004 berjumlah 4.286 orang, dari jumlah tersebut sebesar 60 persen diantaranya di derita oleh kaum pria. Yang membahayakan dari 60 persen tersebut sebesar 40 persennya merupakan usia produktif sekitar 20 - 29 tahun (www.Depkes.go.id). [2].

Dengan dasar pengetahuan ini, maka diperlukan suatu informasi tentang virus HIV, bagaimana virus HIV dapat menular, berapa banyak orang yang terinfeksi virus HIV, informasi seperti itu sangat perlu agar virus HIV dapat dicegah dan tidak menular dan menyebar menjadi lebih banyak.

2. MODEL EPIDEMIK

Di dalam model epidemik AIDS pada suatu populasi manusia, diasumsikan ada imigrasi konstan orang – orang yang rentan terhadap virus HIV dengan besar B ke populasi manusia dengan besar $N(t)$. Misal $X(t), Y(t), A(t)$ dan $Z(t)$ mendefinisikan jumlah subpopulasi rentan, subpopulasi infektious, penderita AIDS, dan seropositip non-AIDS. Jika orang – orang rentan akan mati alami dengan laju μ dan tidak terjadi epidemik, populasi akan *steady state* dengan $N^* = \dfrac{B}{\mu}$. Diasumsikan kematian penderita AIDS dengan laju w. Diagram perpindahan antar populasi digambarkan dalam gambar berikut [3]



Gambar 1. Diagram perpindahan antar subpopulasi

Dari gambar diatas dapat diformulasikan sebuah model sebagai berikut

$$\frac{dX}{dt} = B - \mu X - \beta c \frac{X Y}{X + Y + A + Z}$$

$$\frac{dY}{dt} = \beta c \frac{X Y}{X + Y + A + Z} - (\mu + v)Y \qquad (1)$$

$$\frac{dA}{dt} = pv Y - (\mu + w) A$$

$$\frac{dZ}{dt} = (1 - p)v Y - \mu Z$$

$$N(t) = X(t) + Y(t) + Z(t) + A(t)$$

Dengan :

$B =$ jumlah imigrasi orang yang rentan baru persatuan waktu.

$\mu =$ laju orang yang mati alami persatuan waktu dalam populasi.

$\beta =$ peluang penularan seropositif terhadap orang yang rentan sehingga menyebabkan orang yang rentan menjadi seropositif

$c =$ banyaknya pasangan kawin

$v =$ laju konversi dari infeksi ke AIDS persatuan waktu

$w =$ laju penderita AIDS yang mati karena AIDS persatuan waktu.

$p =$ proporsi seropositif yang menderita AIDS

Jika ditambahkan semua persamaan pada persamaan (1) maka didapat

$$\frac{dN}{dt} = B - \mu N - w A \qquad (2)$$

Epidemik akan tetap ada jika laju reproduksi dasar infeksi virus HIV $R_0 > 1$. Pada persamaan (1) yang kedua, jika pada $t = 0$ orang rentan yang baru terinfeksi virus HIV di dalam populasi didapat dari luar populasi, maka dapat dikatakan jumlah subpopulasi rentan hampir sama dengan jumlah populasi $(X \approx N)$ pada saat $t = 0$, maka dapat ditulis :

$$\frac{dY}{dt} \approx (\beta c - \mu - v)\, Y \qquad (3)$$

$$\approx (v + \mu)(R_0 - 1) Y$$

Jika rata-rata waktu inkubasi dari virus HIV ke AIDS adalah $\frac{1}{v}$ sangat jauh lebih pendek dari rata-rata ekpektasi hidup $\frac{1}{\mu}$ sehingga $v >> \mu$, maka laju reproduksi dasar infeksi virus HIV dapat dinyatakan sebagai perbandingan laju infeksi virus HIV dengan laju konversi infeksi virus HIV ke AIDS sehingga :

$$R_0 \approx \frac{\beta c}{v} \qquad (4)$$

Laju reproduksi dasar infeksi virus HIV diberikan oleh banyaknya jumlah pasangan kawin *c*, tingkat resiko menularkan virus HIV β, rata-rata waktu inkubasi dari virus HIV ke AIDS adalah $\frac{1}{v}$. Jika ada epidemik, sistem (1) akan menuju ke *steady state* yang diberikan oleh :

$$X^* = \frac{(\mu + v) N^*}{\beta c},$$

$$Y^* = \frac{(\mu + w)(B - \mu N^*)}{p v w},$$

$$A^* = \frac{B - \mu N^*}{w}$$

$$Z^* = \frac{(1 - p)(\mu + w)(B - \mu N^*)}{p w \mu}$$

$$N^* = \frac{B R_0 [\mu(v + w + \mu) + v w (1 - p)]}{\mu [\beta c (\mu + w) - p v w]} \qquad (5)$$

Analisa sistem persamaan differensial nonlinear pada persamaan (1) dapat dilihat dari awal epidemik $(t = 0)$. Disini, jika populasi hampir seluruhnya adalah orang-orang yang rentan, orang yang seropositif baru didapat dari orang rentan baru yang terinfeksi HIV yang masuk ke dalam populasi pada saat awal populasi $(t = 0)$, sehingga X hampir setara dengan N $(X \approx N)$. Maka solusi dari persamaan (3) adalah

$$Y(t) = Y_0 \, e^{(\mu + v)(R_0 - 1) t} \qquad (6)$$

Jika persamaan (6) disubstitusi ke persamaan (1) yang ketiga untuk penderita AIDS, maka didapat solusi :

$$A(t)=\frac{p\nu Y_0}{(\beta c-\nu+w)}\left(e^{(\mu+\nu)(R_0-1)t}-e^{-(\mu+w)t}\right) \quad (7)$$

3. ANALISA MODEL

Berdasarkan data [1], laju konversi dari infeksi ke AIDS (ν) adalah 0,2 pertahun, laju kematian alami (μ) $\frac{1}{32}$ pertahun, laju kematian akibat AIDS (w) adalah 1 pertahun, laju reproduksi virus HIV (R_0) adalah 4, proporsi seropositip yang menderita AIDS (p) adalah 30%. Dengan jumlah imigrasi pertahun orang yang sehat ke populasi manusia tersebut adalah $13\,000$ pertahun, maka berdasarkan model pada persamaan (1) dapat dinyatakan sebagai,

$$\frac{dX}{dt}=13000-3.125\times10^{-2}X-0.925\left(\frac{XY}{X+Y+A+Z}\right)$$
$$\frac{dY}{dt}=0.925\left(\frac{XY}{X+Y+A+Z}\right)-23.125\times10^{-2}Y$$
$$\frac{dA}{dt}=0.06Y-103.125\times10^{-2}A$$
$$\frac{dZ}{dt}=0.14Y-3.125\times10^{-2}Z$$

(8)

dengan titik kesetimbangan

$N^*=332232.8264\approx332233$

$Y^*=44992.13435\approx44992$

$Y^*=44992.13435\approx44992$

$X^*=83058.2066\approx83058$

$A^*=2617.72418\approx2618$

Analisa kestabilan dilakukan dengan mentransformasikan titik X^*,Y^*,A^*,Z^* ke solusi nol, yaitu

$X=x+X^*$ $=x+83058.2066$ $\qquad$ $Y=y+Y^*$ $=y+44992.13435$

$A=a+A^*$ $=a+2617.72418$ $\qquad$ $Z=z+Z^*$ $=z+201\,564.7619$

maka persamaan (8) menjadi :

$$\frac{dx}{dt}=10404.43-3.125\times10^{-2}x-0.925\left(\frac{(x+83058.2066)(y+44992.13435)}{x+y+a+z+332\,232{,}8264}\right)$$
$$\frac{dy}{dt}=0.925\left(\frac{(x+83058.2066)(y+44992.13435)}{x+y+a+z+332\,232{,}8264}\right)-23.125\times10^{-2}y \quad (9)$$
$$\frac{da}{dt}=0.06y-103.125\times10^{-2}a$$
$$\frac{dz}{dt}=0.14y-3.125\times10^{-2}z$$

$$\frac{dx}{dt}=10404.43-3.125\times10^{-2}x-0.925\left(\frac{(x+83058.2066)(y+44992.13435)}{x+y+332232{,}8264}\right)$$
$$\frac{dy}{dt}=0.925\left(\frac{(x+83058.2066)(y+44992.13435)}{x+y+332232{,}8264}\right)-23.125\times10^{-2}y \quad (10)$$

dengan titik kesetimbangan baru $(x^*, y^*, a^*, z^*) = (0,0,0,0)$. Untuk menganalisa sistem persamaan differensial nonlinear (9) dilakukan dengan menganalisa 2 persamaan differensial dari sistem persamaan differensial nonlinear dan dibuktikan adanya fungsi Liapunov [4]

1. Pada x dan y

   Pada x dan y, yaitu di persekitaran titik $(x^*, y^*) = (0,0)$ dengan mengansumsikan $a = 0$ dan $z = 0$, sehingga persamaan differensial nonlinear (9) dapat ditulis pada persamaan (10)

Solusi persamaan differensial nonlinear (10) stabil asimtotik jika ada fungsi $V(x,y)$ yang definit positif dan $\dot{V}(x,y)$ yang definit negatif, misal ambil fungsi

$$V(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

dengan $V(0,0) = 0$ dan $V(x,y) > 0$ untuk $x, y \neq 0$, sedemikian sehingga fungsi (11) adalah definit positif. maka $\dot{V}(x,y)$:

$$\dot{V}(x,y) = \frac{\partial V(x,y)}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$= -\frac{\left(23990.01x^2 + 3203.3y^2 + 17605.56(x+y)^2\right)}{x+y+332232.8264} - \frac{\left[x^2(3.125x + 95.625y) + y^2(23.125y - 69.375x)\right]10^{-2}}{x+y+332232.8264} \quad (12)$$

Akan ditunjukkan persamaan (12) definit negatif

- Untuk $(x,y) = (0,0)$, $\dot{V}(x,y)$ pada persamaan (12) menjadi

$$\dot{V}(0,0) = -\frac{\left(23990.01(0)^2 + 3203.3(0)^2 + 17605.56(0+0)^2\right)}{0+0+332\,232.8264} - \frac{\left[(0)^2\left(3.125(0) + 95.625(0)\right) + (0)^2\left(23.125(0) - 69.375(0)\right)\right]10^{-2}}{0+0+332\,232.8264}$$

$$= 0$$

memenuhi untuk $\dot{V}(0,0) = 0$.

- Untuk $(x,y) \neq (0,0)$, jika diberikan $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$ memenuhi

$$\begin{aligned} 23990.01x^2 &> x^2(3.125x + 95.625y)10^{-2} \\ 3203.3y^2 &> y^2(23.125y - 69.375x)10^{-2} \end{aligned} \quad (13)$$

. sehingga jika diberikan $(x,y) = \{(x,y), -1 \le (x,y) \le 1\}$ memenuhi :

$$-\frac{\left(23990.01x^2 + 3203.3y^2 + 17605.56(x+y)^2\right)}{x+y+332\,232.8264} - \frac{\left[x^2(3.125x + 95.625y) + y^2(23.125y - 69.375x)\right]10^{-2}}{x+y+332\,232.8264} < 0$$

jadi untuk domain D yang memuat $(0,0)$ dan (x,y) sedemikian sehingga $(x,y)=\{(x,y),\ -1\le(x,y)\le 1\}$, $\dot{V}(x,y)$ yang diberikan oleh persamaan (12) adalah definit negatif, maka $V(x,y)$ yang diberikan oleh persamaan (11) adalah fungsi Liapunov untuk sistem persamaan (10). dan dapat disimpulkan bahwa x^*, y^* stabil asimtotik.
Dengan cara yang sama dapat dibuktikan sistem dua persamaan dari (9) adalah stabil asimtotik disekitar titik kesetimbangan $(x^*, a^*)=(0,0)$, $(x^*,z^*)=(0,0)$, $(y^*,a^*)=(0,0)$, $(y^*,z^*)=(0,0)$ dan $(a^*,z^*)=(0,0)$

Hasil analisa persamaan differensial nonlinear (9) dengan metode Liapunov yang kedua dengan menganalisa 2 persamaan differensial dari sistem persamaan differensial nonlinear (9) menunjukkan bahwa di persekitaran titik kesetimbangan (x^*,y^*), (x^*,a^*), (x^*,z^*), (y^*,a^*), (y^*,z^*) dan (a^*,z^*) stabil asimtotik, maka dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan x^*,y^*,a^*,z^* dari sistem persamaan differensial nonlinear (9) stabil asimtotik, sehingga dapat disimpulkan juga bahwa titik kesetimbangan X^*,Y^*,A^*,Z^* dari sistem persamaan differensial nonlinear (8) stabil asimtotik. Artinya, pada keadaan *steady state* untuk $t\to\infty$, solusi akan menuju titik kesetimbangan X^*,Y^*,A^*,Z^*, yaitu jumlah populasi sebesar $N^*=332\ 233$ orang terdiri dari $83\ 058$ orang yang sehat, $44\ 992$ orang seropositif, 2618 orang penderita AIDS dan $201\ 565$ orang seropositif non-AIDS.

Dengan proses pelinearan dari persamaan (9) melalui ekspansi Taylor di titik X^*,Y^*,A^*,Z^* dihasilkan

$$\frac{dx}{dt}=-40.645\times10^{-2}x-19.993\times10^{-2}y+3.132\times10^{-2}a+3.132\times10^{-2}z$$
$$\frac{dy}{dt}=9.395\times10^{-2}x-3.132\times10^{-2}y-3.132\times10^{-2}a-3.132\times10^{-2}z$$
$$\frac{da}{dt}=0.06y-103.125\times10^{-2}a$$
$$\frac{dz}{dt}=0.14y-3.125\times10^{-2}z \tag{14}$$

dengan titik kesetimbangan baru $(x^*,y^*,a^*,z^*)=(0,0,0,0)$. Matriks Jakobian J adalah

$$J=\begin{pmatrix}-40.645\times10^{-2} & -19.993\times10^{-2} & 3.132\times10^{-2} & 3.132\times10^{-2}\\ 9.395\times10^{-2} & -3.132\times10^{-2} & -3.132\times10^{-2} & -3.132\times10^{-2}\\ 0 & 0.06 & -103.125\times10^{-2} & 0\\ 0 & 0.14 & 0 & -3.125\times10^{-2}\end{pmatrix} \tag{15}$$

persamaan karakteristik nilai eigen ξ matriks J adalah $|J-\xi I|=0$, dimana I adalah matriks identitas adalah

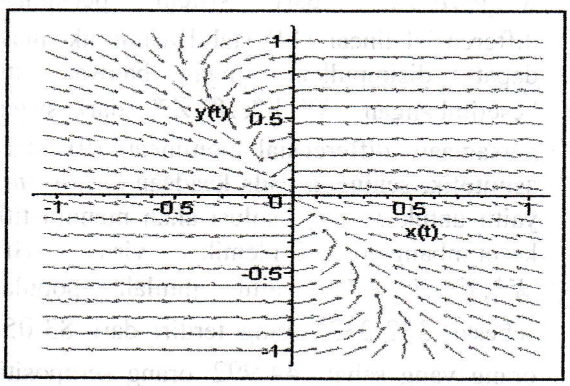
$$|J-\xi I|=(\xi+1.029)(\xi+3.45\times10^{-1})(\xi^2+12.56\times10^{-2}\xi+6.88\times10^{-3})$$
$$=0$$

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -1.029 \\ \xi_2 &= -3.45\times10^{-1} \\ \xi_3 &= -6.28\times10^{-2}+5.42\times10^{-2}I \\ \xi_4 &= -6.28\times10^{-2}-5.42\times10^{-2}I \end{aligned} \tag{16}$$

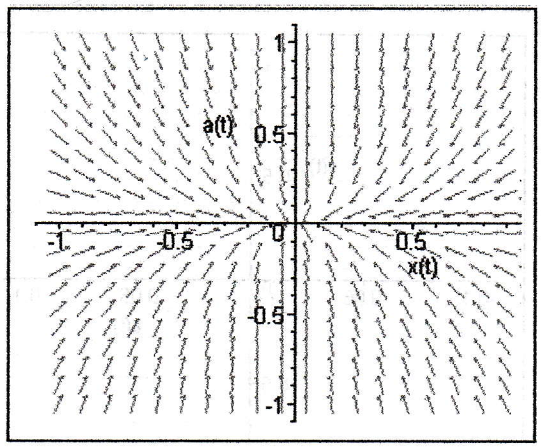
Titik kesetimbangan $(x^*,y^*,a^*,z^*)=(0,0,0,0)$ dari sistem persamaan differensial linear (14) stabil asimtotik jika akar-akar karakteristik dari persamaan (15) mempunyai bagian riil negatif. Karena $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 < 0$ maka dapat disimpulkan titik kesetimbangan $(x^*,y^*,a^*,z^*)=(0,0,0,0)$ stabil asimtotik, maka dapat disimpulkan juga bahwa titik kesetimbangan X^*,Y^*,A^*,Z^* dari sistem persamaan differensial nonlinear (8) stabil asimtotik, sehingga pada keadaan *steady state* yaitu untuk $t\to\infty$, solusi akan menuju titik kesetimbangan epidemik virus HIV X^*,Y^*,A^*,Z^*, yaitu jumlah populasi sebesar 332 233 orang terdiri dari 83 058 orang yang sehat, 44 992 orang seropositif, 2618 orang penderita AIDS dan 201 565 orang seropositif non-AIDS.

4. SIMULASI

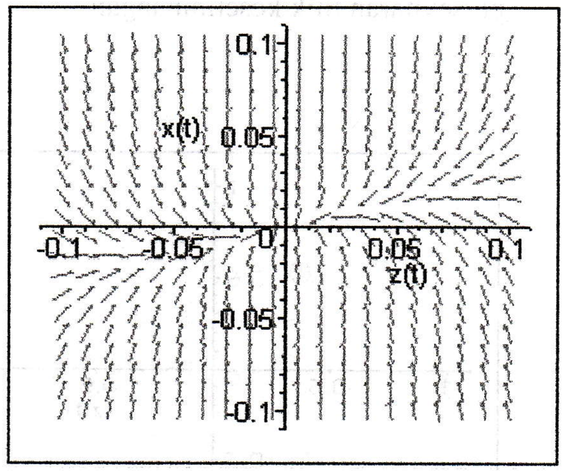
Berikut disajikan trayektori dan kestabilan solusi pada bidang fase dua dimensi dengan simulasi berdasarkan data sekunder [1]



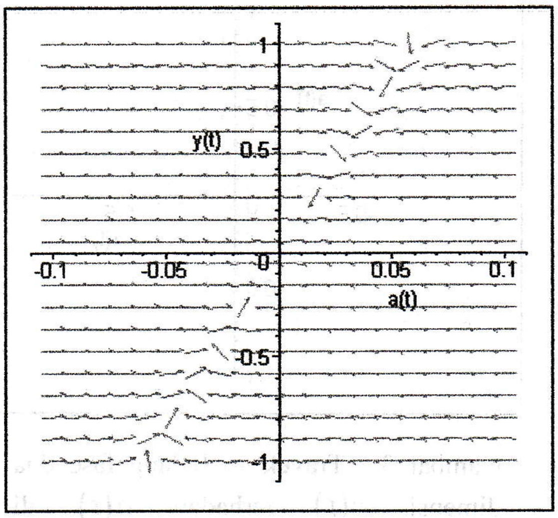
Gambar 2. Trayektori bidang fase dua dimensi $y(t)$ terhadap $x(t)$ di persekitaran titik kesetimbangan



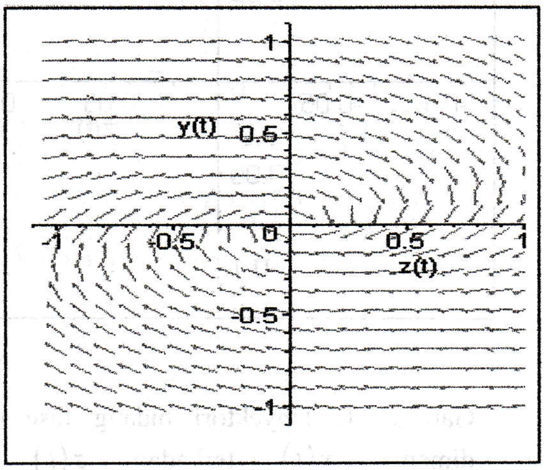
Gambar 3. Trayektori bidang fase dua dimensi $x(t)$ terhadap $a(t)$ di persekitaran titik kesetimbangan



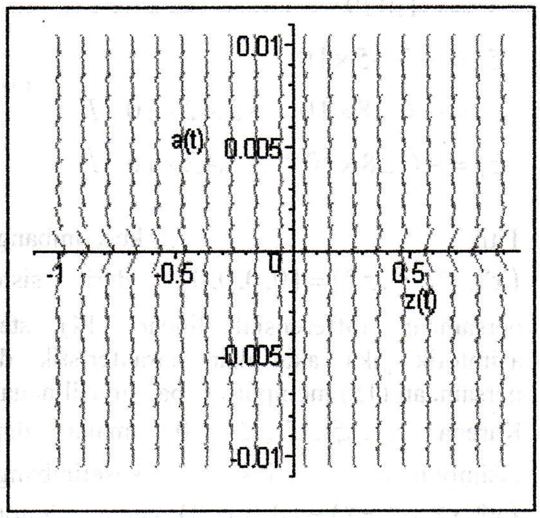
Gambar 4. Trayektori bidang fase dua dimensi $x(t)$ terhadap $z(t)$ di persekitaran titik kesetimbangan



Gambar 5. Trayektori bidang fase dua dimensi $y(t)$ terhadap $a(t)$ di persekitaran titik kesetimbangan



Gambar 6. Trayektori bidang fase dua dimensi $y(t)$ terhadap $z(t)$ di persekitaran titik kesetimbangan



Gambar 7. Trayektori Bidang fase dua dimensi $a(t)$ terhadap $z(t)$ di persekitaran titik kesetimbangan

Hasil analisa persamaan differensial linear (9) pada bidang fase dua dimensi menunjukkan bahwa semua trayektori menuju ke titik kesetimbangan $\left(x^*,y^*\right)$, $\left(x^*,a^*\right)$, $\left(x^*,z^*\right)$, $\left(y^*,a^*\right)$, $\left(y^*,z^*\right)$ dan $\left(a^*,z^*\right)$, maka dapat disimpulkan bahwa semua trayektori juga menuju ke titik kesetimbangan x^*,y^*,a^*,z^* sehingga titik kesetimbangan x^*,y^*,a^*,z^* dari sistem persamaan differensial linear (14) stabil asimtotik, maka dapat disimpulkan juga bahwa titik kesetimbangan X^*,Y^*,A^*,Z^* dari sistem persamaan differensial nonlinear (9) stabil asimtotik, sehingga pada keadaan *steady state* yaitu untuk $t \to \infty$, solusi akan menuju titik kesetimbangan epidemik virus HIV X^*,Y^*,A^*,Z^*, yaitu jumlah populasi sebesar 332 233 orang terdiri dari 83 058 orang yang sehat, 44 992 orang seropositif, 2618 orang penderita AIDS dan 201 565 orang seropositif non-AIDS.

5. KESIMPULAN

Human Immunodeficiency Virus (HIV) adalah virus yang dapat merusak sistem kekebalan tubuh manusia. Pada pemodelan dinamik penularan *human immunodeficiency virus* (HIV) sederhana mempunyai titik kesetimbangan yang stabil. Pada pemodelan dinamik penularan *human immunodeficiency virus* (HIV) lengkap mempunyai titik kesetimbangan yang stabil asimtotik sehingga semua solusi akan menuju ke titik kesetimbangannya. Virus HIV dapat menjadi epidemik jika laju reproduksi dasar virus HIV lebih besar dari 1 dan akan hilang jika laju reproduksi dasar virus HIV lebih kecil dari 1.

6. DAFTAR PUSTAKA

1. Pratt, Robert, 1995. *HIV & AIDS A Strategy for Nursing Care*, New York : Anthony Inc
2. \\http : www.Depkes.go.id. *"Setiap Hari 14 Ribu Orang di Dunia Tertular Virus HIV"*. 28 November 2005.
3. Murray, J.D, 1993. *Mathematical Biology*, Heidelberg Berlin : Springer Verlag.
4. Ross, Stephey L, 1984, *Differential Equations*, Canada : John Wiley & Sons, Inc.