Jurnal Sains & Matematika
Volume 17 Nomor 1 Januari 2009

ISSN 0854-0675
Artikel Penelitian: 1-7

GRAF SIMETRI LEMAH

Susilo Hariyanto, Y.D. Sumanto dan Fatkhurohman
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Diponegoro Semarang

ABSTRAK—Diberikan suatu graf sederhana X dengan himpunan semua titiknya *V*(*X*), himpunan semua garisnya *E*(*X*). Himpunan semua automorfisme pada graf *X* dinotasikan *Aut X* dan semua endomorfisme dinotasikan degan *End X*. Dalam artikel ini, akan diidentifikasi apakah graf *X* merupakan graf simetri atau graf simetri lemah. Untuk mengidentifikasi diperlukan pemahaman tentang grup, semigrup, automorfisme dan endomorfisme dalam graf. Jika pada sebarang pasang titik $x, y \in V(X)$, terdapat pemetaan $f \in$ *Aut X* sedemikian hingga berlaku $f(x) = y$ maka graf X dikatakan sebagai graf verteks-simetri, sedangkan jika berlaku pada sebarang garis pada *X* maka graf *X* dikatakan graf edge-simetri dan jika berlaku pada sebarang titik dan sebarang garis maka disebut graf simetri. Jika pemetaan diambil dari *End X* maka graf simetri yang diperoleh adalah graf simetri yang diperlemah atau disebut graf simetri lemah.

Kata kunci : automorfisme dan endomorfisme pada graf.

I. PENDAHULUAN

Perkembangan teori graf tidak lepas dari perkembangan bidang bahasan Matematika yang lain, salah satunya adalah aljabar khususnya teori grup. Teori grup digunakan untuk mendefinisikan graf simetri. Kemudian dalam aljabar juga dikenal istilah semigrup dimana persyaratannya lebih ringan daripada grup. Dengan persyaratan yang lebih ringan ini, semigup akan digunakan untuk mendefinisikan graf simetri lemah. Graf yang didefinisikan dengan menggunakan pendekatan teori semigrup ini akan dibandingkan dengan graf simetri. Adapun yang menjadi permasalahan dalam tulisan ini adalah bagaimana mengidentifikasi graf simetri dan graf simetri lemah dengan pendekatan Aljabar. Untuk mengidentifikasi graf simetri dan graf simetri lemah digunakan konsep automorfisme dan endomorfisme graf.

II. DASAR TEORI

Untuk menjelaskan automorfisme dan endomorfisme dibutuhkan beberapa definisi berikut:

Definisi 2.1 [2]

Misalkan $G \subseteq S$ $G \subseteq S$ (himpunan G adalah himpunan bagian dari S) dan andaikan bahwa suatu relasi = dan operasi biner * terdefinisi di S. Himpunan G adalah suatu grup (group) terhadap operasi biner * jika dan hanya jika berlaku kondisi-kondisi sebagai berikut:

1. G adalah himpunan yang tertutup terhadap operasi biner *, artinya jika $x \in G$ $x \in G$ dan $y \in G$ $y \in G$, maka $x * y \in G$ $x * y \in G$.
2. Operasi biner * bersifat assosiatif pada G, artinya $\forall x, y, z \in G$ $\forall x, y, z \in G$, ***berlaku*** $x*(y*z) = (x*y)*z$ $x*(y*z) = (x*y)*z$.
3. G memiliki elemen identitas e*I*, artinya $\exists e \in G$, $\exists I \in G$, sedemikian hingga berlaku $x*1 = 1*x = x$ $x*I = I*x = x$, untuk setiap $x \in G$ $x \in G$.

4. Setiap elemen dari G memiliki invers, artinya
   $\forall a \in G, \exists b \in G \; \forall x \in G, \exists b \in G,$
   sedemikian hingga
   $a * b = b * a = 1 \; a * b = b * a = I,$
   dengan 1 merupakan elemen identitas dari G.

Definisi 2.2 [2]

Misalkan suatu himpunan H. Diberikan operasi biner * pada H. Maka H merupakan semigrup jika dan hanya jika memenuhi :

1. Himpunan H bersifat tertutup terhadap operasi biner *, artinya untuk setiap $x, y \in H$ maka $x * y \in H$.
2. Operasi biner * bersifat assosiatif di dalam H, artinya untuk setiap $x, y, z \in H$ berlaku x*(y*z) = (x*y)*z.

Definisi 2. 3

Misalkan suatu graf sederhana X dengan himpunan semua titik-titiknya V(X) dan himpunan semua garis-garisnya E(X). Jika dua buah titik $x_1, x_2 \in V(X)$ adjacent di dalam X maka dituliskan $\{x_1, x_2\} \in E(X)$.

Definisi 2.4

Misalkan dua buah graf yaitu X dan Y dengan himpunan semua titik-titiknya masing-masing V(X) dan V(Y) serta himpunan semua garis-garisnya masing-masing E(X) dan E(Y). Suatu pemetaan f memetakan V(X) ke V(Y), ditulis: $f : V(X) \to V(Y)$ dikatakan sebagai homomorfisme jika f mempertahankan adjancy, artinya berlaku bahwa: jika $\{x_1, x_2\} \in E(X)$ maka $\{f(x_1), f(x_2)\} \in E(Y)$.

Definisi 2.5

Misalkan $f : V(X) \to V(X)$, f homomorfisme, f bijektif dan f^{-1} adalah homomorfisme maka f dikatakan sebagai automorfisme dari graf X.

III. PEMBAHASAN

3.1 Graf Simetri

Definisi 3.1.1

Suatu graf X dengan himpunan semua titik-titiknya V(X) dikatakan sebagai graf verteks-simetri jika dan hanya jika terdapat suatu pemetaan $f \in$ Aut X, sedemikian hingga untuk setiap $x_1, x_2 \in V(X)$ berlaku $f(x_1) = x_2$.

Definisi 3.1.2

Suatu graf X dengan himpunan semua garis-garisnya E(X) dikatakan sebagai graf edge-simetri jika dan hanya jika terdapat $f \in$ Aut X, sedemikian hingga untuk setiap $\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\} \in E(X)$ berlaku $\{f(x_1), f(x_2)\} = \{y_1, y_2\}$.

Definisi 3.1.3

Suatu graf X dikatakan graf simetri jika dan hanya jika graf X merupakan graf verteks-simetri dan graf edge-simetri.

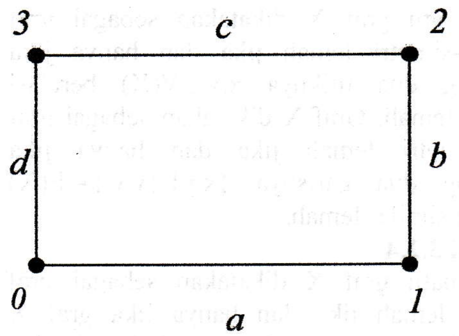
Definisi 3.1.4

Misalkan suatu graf X dengan himpunan semua titik-titiknya $V(X)$ dan suatu pemetaaan $f : V(X) \to V(X)$. Jika f merupakan homomorfisme maka f dikatakan sebagai endomorfisme dari graf X.

Contoh graf simetri:

Berikut ini akan diberikan suatu graf kemudian akan diidentifikasi apakah merupakan graf simetri.

Misalkan suatu graf X, dengan himpunan semua titik-titiknya $V(X) = \{0,1,2,3\}$, dan himpunan semua garis-garisnya $E(X) = \{a,b,c,d\}$.



Dibentuk pemetaan yang memetakan $V(X)$ ke $V(X)$ adalah :

$$c_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad c_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad c_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad c_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad c_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Misalkan J = $\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8\}$, dengan c_1 merupakan fungsi identitas.

Akan dibuktikan bahwa setiap elemen J merupakan automorfisma. Untuk membuktikan bahwa setiap elemen J merupakan automorfisma, maka harus dibuktikan 4 hal, yaitu setiap elemen J merupakan pemetaan pada X, setiap elemen J merupakan homomorfisme, setiap elemen J merupakan pemetaan bijektif dan invers dari setiap elemen J merupakan homomorfisma.

a.) Jelas bahwa setiap elemen J memetakan himpunan V(X) pada dirinya sendiri.

b.) Untuk setiap f $\in$ J, berlaku jika $\{x,y\} \in$ E(X), maka $\{f(x), f(y)\}$ $\in$ E(x). Ini menunjukkan bahwa setiap f $\in$ J merupakan homomorfisma.

c.) Untuk setiap f $\in$ J, berlaku untuk setiap x,y $\in$ V(X), jika x = y maka f(x) = f(y). Ini menunjukkan bahwa setiap elemen J merupakan fungsi injekif. Berlaku pula, untuk setiap y $\in$ V(X), terdapat x $\in$ V(X), sedemikian hingga f(x)=y. Ini menunjukkan bahwa setiap elemen J merupakan fungsi surjektif. Jadi setiap elemen J merupakan pemetaan bijektif.

Diperhatikan tabel operasi komposisi fungsi berikut:

Tabel 3.1.1 Pasangan Sebarang Titik-titik pada Graf X

Pasangan semua titik-titik pada graf X $x, y \in V(X)$	$f \in$ Aut X **sedemikian sehingga** $f(x) = y$
0, 0	c_1
0, 1	c_3
0, 2	c_5
0, 3	c_8
1, 1	c_1
1, 2	c_8
1, 3	c_6
2, 2	c_2
2, 3	c_3
3, 3	c_5

Dari tabel 3.1.1 di atas, dapat ditunjukkan bahwa untuk setiap pasang semua titik-titiknya $x, y \in V(X)$, maka terdapat $f \in$ Aut X , sedemikian hingga f(x) = y. Jadi graf X merupakan graf simetri titik.

Tabel 3.1.2 Pasangan Sebarang Garis-garis pada Graf X

Pasangan semua garis-garis pada graf X $v,w \in E(X)$	$f \in$ Aut X **sedemikian sehingga** $f(v)=w$
a, a	c_1
a, b	c_4
a, c	c_6
a, d	c_2
b, b	c_1
b, c	c_4
b, d	c_3
c, c	c_1
c, d	c_5
d, d	c_1

Dari tabel 3.1.2 di atas, untuk setiap pasangan garis $v,w \in E(X)$, maka terdapat $f \in$ Aut X, sedemikian sehingga $f(v)=w$.

Karena graf X merupakan graf verteks-simetri dan graf edge-simetri maka graf X merupakan graf simetri.

3.2 Graf Simetri Lemah

Berikut ini akan dibahas mengenai graf simetri lemah. Pembahasan dimulai dengan memberikan definisi graf simetri lemah.

Definisi 3.2.1

Dua buah titik x dan x' dari suatu graf X dikatakan similar lemah jika dan hanya jika terdapat $f,g \in$ End X sedemikian hingga $f(x)=x'$ dan $g(x')=x$, dan dinotasikan $x \sim_w x'$.

Definisi 3.2.2

Dua buah garis $\{x,x'\}$ dan $\{y,y'\}$ dari suatu graf X dikatakan similar lemah jika terdapat $f,g \in$ End X sedemikian hingga $\{f(x),f(x')\}=\{y,y'\}$ dan $\{g(y),g(y')\}=\{x,x'\}$, dan dinotasikan $\{x,x'\} \sim_w \{y,y'\}$.

Definisi 3.2.3

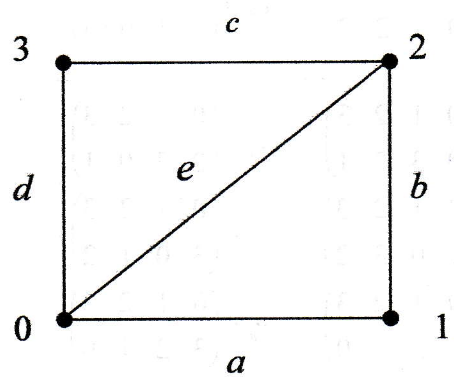
Suatu graf X dikatakan sebagai graf verteks-simetri lemah jika dan hanya jika sebarang dua titiknya x,y $\in$ V(X) berelasi similar lemah. Graf X dikatakan sebagai graf edge-simetri lemah jika dan hanya jika sebarang dua garisnya $\{x,y\},\{v,w\} \in E(X)$ berelasi similar lemah.

Definisi 3.2.4

Suatu graf X dikatakan sebagai graf simetri lemah jika dan hanya jika graf X merupakan graf verteks-simetri lemah dan graf edge-simetri lemah.

Contoh graf simetri lemah :

Misalkan suatu graf Y dengan himpunan semua titik-titiknya V(Y) = {0, 1, 2, 3} dan himpunan semua garis-garisnya E(Y) = {a, b, c, d, e}.



Dibentuk pemetaan yang memetakan V(Y) ke V(Y) seperti berikut :

$$a_1=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix} \quad a_3=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$a_2=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad a_4=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

Misalkan G = $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$.

Perhatikan tabel operasi komposisi fungsi pada G berikut :

Tabel 3.2.1 Operasi Komposisi Fungsi pada G

$\bullet$	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4
a_2	a_2	a_1	a_4	a_3
a_3	a_3	a_4	a_1	a_2
a_4	a_4	a_3	a_2	a_1

Akan dibuktikan bahwa G merupakan Aut Y :

a.) Jelas bahwa setiap elemen G memetakan V(Y) ke V(Y).

b.) Jika diambil sebarang edge $\{x,y\}\in E(Y)$, maka untuk setiap $f\in G$ berlaku $\{f(x),f(y)\}\in E(Y)$. Ini menunjukkan bahwa setiap elemen G merupakan homomofisme.

c.) Jika diambil sebarang $y\in V(Y)$, maka terdapat $x\in V(Y)$, sedemikian hingga $f(x)=y$, untuk setiap $f\in G$. Jika diambil sebarang $x,y\in V(Y)$, berlaku jika $x=y$, maka $f(x)=f(y)$. Ini menunjukkan bahwa untuk setiap elemen G merupakan pemetaan bijektif.

d.) Dari tabel operasi komposisi fungsi di atas, maka dapat dilihat bahwa invers dari setiap elemen G merupakan elemen G. Karena setiap elemen G merupakan homomorfisme maka setiap inversnya juga merupakan homomorfisme.

Dari pembuktian di atas dapat disimpulkan bahwa G merupakan himpunan automorfisme graf Y, ditulis G = Aut Y.

Akan diselidiki apakah graf Y merupakan graf simetri :

Perhatikan setiap elemen G, untuk $0,1\in V(Y)$, tidak terdapat $f\in$ G sedemikian hingga $f(0)=1$ atau $f(1)=0$. Jadi graf Y bukan merupakan graf vertks-simetri . Karena Y bukan merupakan graf semua verteks-simetri maka menurut Definisi 3.1.3, Y bukan merupakan graf simetri.

Dipandang kembali graf Y di atas, diperhatikan pemetaan yang memetakan V(X) ke V(X) berikut :

$$b_1=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\0&1&2&3\end{pmatrix}\quad b_8=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\2&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$b_2=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\0&1&2&1\end{pmatrix}\quad b_9=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\2&0&3&0\end{pmatrix}$$

$$b_3=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\0&2&3&2\end{pmatrix}\quad b_{10}=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\2&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$b_4=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\0&3&2&1\end{pmatrix}\quad b_{11}=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\2&1&0&3\end{pmatrix}$$

$$b_5=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\0&3&2&3\end{pmatrix}\quad b_{12}=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\2&3&0&1\end{pmatrix}$$

$$b_6=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\1&0&2&0\end{pmatrix}$$

$$b_7=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\1&2&0&2\end{pmatrix}$$

Misalkan :

$H=\{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6,b_7,b_8,b_9,b_{10},b_{11},b_{12},b_{13}\}$ Perhatikan bahwa setiap $f\in H$, berlaku jika $\{x,y\}\in E(Y)$ maka $\{f(x),f(y)\}\in E(Y)$, untuk sebarang $x,y\in V(Y)$. Jadi setiap elemen H merupakan homomorfisme pada graf Y. Sehingga H = End Y.

Tidak semua elemen H merupakan automorfisme pada graf Y, buktinya :

Diperhatikan $b_2\in H$, terdapat $1,3\in V(Y)$, dan jelas $1\neq 3$, sedemikian sehingga $b_2(1)=b_2(3)=1$. Sehingga b_2 bukan merupakan pemetaan injektif dan jelas bukan merupakan pemetaan bijektif. Jadi terdapat elemen H yang bukan merupakan automorfisme, sehingga $H\neq$ Aut Y.

Jadi setiap elemen H merupakan endomorfisme tetapi tidak setiap elemen H merupakan automorfisme.
Diperhatikan bahwa :

Tabel 3.2.1 Pasangan Sebarang Titik-titik pada Graf Y

Pasangan semua titik-titik graf Y $x, y \in V(Y)$	$f \in$ End Y, **Sedemikian hingga** $f(x) = y$	$g \in$ End Y, **Sedemikian hingga** $g(y) = x$
0, 0	b_1	b_2
0, 1	b_6	b_8
0, 2	b_8	b_7
0, 3	b_{13}	b_6
1, 1	b_1	b_2
1, 2	b_3	b_8
1, 3	b_4	b_{12}
2, 2	b_1	b_2
2, 3	b_3	b_7
3, 3	b_1	b_5

Dari tabel di atas, dapat diketahui bahwa untuk setiap pasang semua titik-titiknya $x, y \in V(Y)$, terdapat pemetaan $f, g \in$ End Y, sedemikian hingga $f(x) = y$ dan $g(y) = x$. Jadi graf Y merupakan graf verteks-simetri lemah.
Diperhatikan bahwa :

Tabel 3.2.2 Pasangan Sebarang Garis-garis pada Graf Y

Pasangan semua garis-garis graf Y $r, s \in V(Y)$	$f \in$ End Y, **Sedemikian hingga** $f(r) = s$	$g \in$ End Y, **Sedemikian hingga** $g(s) = r$
a, a	b_1	b_2
a, b	b_7	b_8
a, c	b_{12}	b_{10}
a, d	b_4	b_2
a, e	b_3	b_7
b, b	b_1	b_2
b, c	b_3	b_4
b, d	b_9	b_7
b, e	b_6	b_8
c, c	b_1	b_3
c, d	b_{11}	b_{11}
c, e	b_7	b_9
d, d	b_1	b_5
d, e	b_3	b_3
e, e	b_1	b_4

Dari tabel di atas, dapat dilihat bahwa untuk setiap pasang garis $r, s \in E(Y)$, terdapat $f, g \in$ End Y, sedemikian hingga $f(r) = s$ dan $g(s) = r$. Jadi graf Y merupakan graf edge-simetri lemah.

Berdasarkan Definisi 3.2.4, dapat disimpulkan bahwa graf Y bukan merupakan graf simetri tetapi merupakan graf simetri lemah.

KESIMPULAN

Dari pembahasan , dapat disimpulkan bahwa :

1. Penerapan teori grup pada suatu graf menghasilkan graf yang dinamakan sebagai graf simetri
2. Penerapan teori semigrup pada suatu graf menghasilkan graf simetri lemah.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Fan, Suohai. 2003. Weakly Symmetric Graphs and Their Endomorfism Monoids. Yunnan University and South China Normal University South East Asian Mathematical Society.

[2] Gilbert, Jimmie and Linda Gilbert. 1984. Elements of Modern Algebra. PWS Publishers.

[3] Harary, Frank. 1969. Graph Theory. Addison-Wesley Publishing Company.

[4] Herstein, IN. 1975. Topics in Algebra. Xerox Corporation.

[5] Lallement, Gerard. 1979. Semigroups and Combiantorial Applications. New York :John Willey&Sons.

[6] Seputro, Theresia MH Tirta. 1992. Graf Pengantar. Surabaya : University Press IKIP Surabaya.

[7] Silaban, Pantur. 1995. Teori Himpunan. Jakarta : Penerbit Erlangga

[8]http://mathworld.wolfram.com/search/?query=symmetric+graph&x=13&y=10 . (Diakses tanggal 31 Januari 2008)