Jurnal Sains & Matematika (JSM) ISSN 0854-0675
Volume 15, Nomor 1, Januari 2007 Artikel Penelitian: 39-43

Reduksi Persamaan Dirac ke Persamaan Cauchy Nondegenerate

Susilo Hariyanto[1]
[1] Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

ABSTRAK---Persamaan Dirac abstrak adalah suatu sistem persamaan diferensial parsial yang memiliki struktur abstrak sebagai berikut

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = -i(cD + mc^2(\tau - 1) + V)\,\psi(t)$$

dengan massa $m>0$, kecepatan cahaya $c>0$.
Dalam artikel ini dikaji suatu cara mereduksi persamaan dirac abstrak yang dapat dipandang sebagai masalah Cauchy degenerate, ke masalah Cauchy abstrak *nondegenerate*. Reduksi ini dapat dilakukan dengan memformulasikan masalah yang dibicarakan dalam ruang Hilbert H dan tranformasi $\mathrm{T}: \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ yang didefinisikan sebagai fungsi berkut:

$$\psi(t) \in D(D) \subset \mathrm{H} \;\to\; \mathrm{T}(\psi(t)) \equiv s(t) = (P_+ + cP_-)\psi(t)$$

Kata kunci: Cauchy Degenerate, Nondegenerate, Persamaan Dirac, Ruang Hilbert

PENDAHULUAN

Perhatikan masalah Cauchy abstrak, $\frac{d}{dt}Mz(t) = Az(t), \quad z(0) = z_0$ dengan operator M tidak harus mempunyai invers.Masalah Cauchy abstrak disebut masalah Cauchy abstrak degenerate jika M tidak mempunyai invers. Masalah Cauchy abstrak (disebut masalah Cauchy abstrak nondegenerate jika M mempunyai invers. Adapun dalam pembahasan ini akan dibicarakan kemungkinan mereduksi persamaan dirac abstrak $\frac{d}{dt}\psi(t) = -i(cD + mc^2(\tau - 1) + V)\,\psi(t)$ yang dapat dipandang sebagai masalah Cauchy abstrak degenerate ke permasalahan menyelesaikan masalah Cauchy abstrak nondegenerate.

KONSEP DASAR

Setiap penyelesaian *strict* masalah Cauchy abstrak *degenerate* pasti memenuhi $z(t) \in \mathrm{D}_A$ untuk semua $t \geq 0$, dengan

$$\mathrm{D}_A = \{\, z(t) \in \mathrm{D}(A) \mid Az(t) \in \overline{(Ran\ M)} \,\}$$

Dalam menyelesaikan masalah Cauchy abstrak *degenerate* diawali dengan asusmsi bahwa operator A,M tertutup dan terdefinisi dense. Hal ini berakibat operator $A|_{\mathrm{D}_A}$ tertutup.

Karena M operator tertutup, maka *Ker M* merupakan ruang bagian tertutup dari H. Misalkan P proyeksi *ortogonal* pada *Ker M*, akibatnya $P^T = 1 - P$ juga merupakan proyeksi *ortogonal* pada $(Ker\ M)^{\perp}$. Karena M tertutup dan terdefinisi *dense* dalam H, maka M^* tertutup dan terdefinisi *dense* dalam K. Untuk selanjutnya misalkan pula Q proyeksi *ortogonal* pada $Ker\ M^*$, akibatnya $Q^T = 1 - Q$ juga merupakan proyeksi *ortogonal* pada $(Ker\ M^*)^{\perp}$. Dengan demikian dapat dituliskan :

$$P\mathrm{H} = Ker\ M,\ P^T\mathrm{H} = \overline{(Ran\ M^*)},\ Q\mathrm{K} = Ker\ M^* \text{ dan } Q^T\mathrm{K} = \overline{(Ran\ M)}.$$

Operator *M injektif* jika dan hanya jika $Ker\ M = \{0\}$. Oleh karena itu agar dimungkinkan mereduksi operator M yang belum tentu mempunyai *invers* ke operator yang mempunyai *invers* terlebih dahulu didefinisikan operator pembatasan dari M pada $(Ker\ M)^{\perp} \cap \mathrm{D}(M)$ sebagai berikut:

$$M_r = M|_{\mathrm{D}(M_r)}, \text{ dengan}$$

$\mathrm{D}(M_r) = (\ker M)^{\perp} \cap \mathrm{D}(M)$.
Operator $M|_{\mathrm{D}(M_r)} = M_r$ mempunyai *invers* .

Misalkan $\left(P^T\right)^{-1}\{x(t)\}$ merupakan bayangan *invers* dari $x(t) \in (Ker\ M)^{\perp}$ terhadap proyeksi P^T yaitu $\left(P^T\right)^{-1}\{x(t)\} = \{x(t) + y(t) \mid y(t) \in Ker\ M\}$, $x(t) \in (Ker\ M)^{\perp}$. Apabila diperhatikan himpunan $\left(P^T\right)^{-1}\{x(t)\}$ belum tentu merupakan singelton.

Selanjutnya akan didefinisikan operator A_0 yang merupakan operator pembatas dari operator A pada $(Ker\ M)^{\perp}$ sebagai berikut:

$A_0\{x(t)\} =$
$A\left\{\left(P^T\right)^{-1}\{x(t)\} \cap \mathrm{D}_A\right\} \subset \overline{(Ran\ M)}$, untuk setiap $x(t) \in \mathrm{D}(A_0)$ dengan,

$\mathrm{D}(A_0)=$
$$\left\{x(t) \in (Ker\ M)^{\perp} \mid \left(P^T\right)^{-1}\{x(t)\} \cap \mathrm{D}_A \neq \phi\right\}$$

Operator A_0 bernilai tunggal jika $\left(P^T\right)^{-1}\{x(t)\} \cap \mathrm{D}_A$ merupakan singelton. Untuk itu diperlukan asumsi $P\mathrm{D}_A \subset \mathrm{D}_A$ dan operator $(QAP)|_{P\mathrm{D}_A}$ mempunyai invers yang terbatas.Dengan asumsi tersebut , maka vektor $z(t) \in H$ merupakan anggota ruang bagian D_A apabila $z(t) \in \mathrm{D}(A)$, $Pz(t) = -(QAP)^{-1}QAP^Tz(t)$ dan setiap $x(t) \in P^T\mathrm{D}_A \subset (\ker M)^{\perp}$ menyatakan dengan tunggal $z(t) \in \mathrm{D}_A$ sehingga $x(t) = P^T z(t)$ dan $z(t) = (1-(QAP)^{-1}QA)\, x(t)$.

Selanjutnya dapat didefinisikan operator Z_A yaitu sebagai berikut:
$$Z_A = P^T - (QAP)^{-1}QAP^T$$

Operator Z_A terdefinisi pada $\mathrm{D}(Z_A) \supset P^T\mathrm{D}_A$. Pembatasan $Z_A|_{P^T\mathrm{D}_A}$ adalah $1 - (QAP)^{-1}QA$ pada $P^T\mathrm{D}_A$ yang merupakan *invers* dari proyeksi $P^T|_{\mathrm{D}_A}$ dalam arti: $Z_AP^T = 1$ pada D_A dan $P^TZ_A = 1$, pada $P^T\mathrm{D}_A$

Jadi operator A_0 dapat dinyatakan menjadi $A_0 = A\ Z_A$,pada $\mathrm{D}(A_0) = P^T\mathrm{D}_A$ dan untuk setiap $z(t) \in \mathrm{D}_A$ diperoleh $A_0x(t) = Az(t)$ dengan $x(t) = P^Tz(t)$.

Operator A tertutup dan mempunyai *invers* terbatas ekuivalen dengan operator A *injektif* dengan $Ran\ A = \mathrm{K}$. Hal ini berakibat $A|_{\mathrm{D}_A}$ mempunyai *invers* terbatas yaitu :

$A|_{\mathrm{D}_A} : \mathrm{D}_A \rightarrow Q^T\mathrm{K}$
$$(A|_{\mathrm{D}_A})^{-1} : Q^T\mathrm{K} \rightarrow \mathrm{D}_A$$
Dengan demikian operator $A_0^{-1} = (A\ Z_A)^{-1} = P^TA^{-1}|_{Q^T\mathrm{K}}$ terbatas dan terdefinisi pada $Q^T\mathrm{K}$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Diberikan $\tau : \mathrm{H} \rightarrow \mathrm{H}$ operator involusi uniter, terbatas dan operator $D : \mathrm{D}(D) \subset \mathrm{H} \rightarrow \mathrm{H}$ self adjoint, terdefinisi dense dan anti komutatif dengan τ, yaitu : $\tau\,\mathrm{D}(D) \subset \mathrm{D}(D)$, $D\tau + \tau D = 0$ pada $\mathrm{D}(D)$. (1)

Diberikan pula $V : \mathrm{D}(V) \subset \mathrm{H} \rightarrow \mathrm{H}$ operator simetri, terbatas relatif terhadap D dan komutatif dengan τ ,yaitu :

$\tau\,\mathrm{D}(V) \subset \mathrm{D}(V)$, $V\tau - \tau V = 0$ pada $\mathrm{D}(V)$. (2)

Persamaan Dirac abstrak adalah suatu sistem persamaan diferensial parsial yang memiliki struktur abstrak sebagai berikut

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = -i(cD + mc^2(\tau - 1) + V)\,\psi(t) \quad (3)$$
dengan massa $m>0$, kecepatan cahaya $c>0$.

Oleh karena $\tau^2 = 1$ (τ involusi) maka operator τ mempunyai nilai eigen 1 dan atau –1. Untuk menghilangkan trivialitas dari operator τ, misalkan $\tau = 1$ diasumsikan bahwa 1 dan –1 merupakan nilai eigen operator τ. Diberikan $P_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \tau)$ merupakan proyeksi ortogonal pada ruang Hilbert H dengan definisi $P_{\pm}\mathrm{H} = \mathrm{H}_{\pm}$. Sehingga ruang Hilbert H dapat dinyatakan sebagai jumlahan langsung kedua ruang eigen H_+ dan H_- yang saling ortogonal, yaitu $\mathrm{H} = \mathrm{H}_+ \oplus \mathrm{H}_-$

Selanjutnya dari definisi operator-operator V, D, P_+, P_- didapat sifat-sifat hubungan sebagaimana tertuang dalam Lemma berikut.

Lemma 1
(i). $VP_+ = P_+ V$, *pada* $D(V)$.
(ii). $VP_- = P_- V$, *pada* $D(V)$.
(iii). $DP_+ = P_- D$, *pada* $D(D)$.
(iv). $DP_- = P_+ D$, *pada* $D(D)$.
Bukti : Hanya akan dibuktikan untuk (i) dan (iii) sedangkan bukti untuk (ii) analog dengan (i) dan (iv) analog dengan (iii).
(i). Untuk setiap $\sigma(t) \in D(V)$ berlaku,

$$VP_+\sigma(t) = V\left(\frac{1+\tau}{2}\right)\sigma(t) = \left(\frac{V+V\tau}{2}\right)\sigma(t) = \left(\frac{V+\tau V}{2}\right)\sigma(t) = P_+V\sigma(t).$$

(iii).Untuk setiap $\sigma(t) \in D(D)$ berlaku,

$$DP_+\sigma(t) = D\left(\frac{1+\tau}{2}\right)\sigma(t) = \left(\frac{D+D\tau}{2}\right)\sigma(t) = \left(\frac{D-\tau D}{2}\right)\sigma(t) = P_- D\sigma(t).$$

■

Diperhatikan persamaan Diract (3), untuk mencari penyelesaian limit non relativistik $(c \to \infty)$ terlebih dahulu didefinisikan tranformasi :

$$T: H \to H$$

$$\psi(t) \in D(D) \subset H \to T(\psi(t)) \equiv s(t) = (P_+ + cP_-)\psi(t).$$

Oleh karena itu $\psi(t) = \left(P_+ + \frac{P_-}{c}\right)s(t)$.

Lemma 2
Untuk setiap $s(t) \in D(D)$ *berlaku :*

$$\frac{d}{dt}\left(P_+ + \frac{P_-}{c}\right)s(t) = -i\left(D + VP_+ - 2mP_- + \frac{VP_-}{c^2}\right)s(t).$$

Bukti :
Dengan tranformasi T persamaan (3) dapat dinyatakan sebagai :

$$\frac{d}{dt}\left(P_+ + \frac{P_-}{c}\right)s(t) = -i\left(cD + mc^2(\tau-1) + V\right)\left(P_+ + \frac{P_-}{c}\right)s(t)$$

Akibatnya

$$\left(P_+ + \frac{P_-}{c}\right)\frac{d}{dt}\left(P_+ + \frac{P_-}{c}\right)s(t) = -i\left(P_+ + \frac{P_-}{c}\right)\left(cD + mc^2(\tau-1) + V\right)\left(P_+ + \frac{P_-}{c}\right)s(t)$$

atau

$$\frac{d}{dt}\left(P_+ + \frac{P_-}{c}\right)\left(P_+ + \frac{P_-}{c}\right)s(t) = -i\left(P_+ + \frac{P_-}{c}\right)\left(cD + mc^2(\tau-1) + V\right)\left(P_+ + \frac{P_-}{c}\right)s(t)$$

atau

$$\frac{d}{dt}\left(P_+ + \frac{P_-}{c^2}\right)s(t) = -i\left(P_+ + \frac{P_-}{c}\right)\left(cD + mc^2(\tau-1) + V\right)\left(P_+ + \frac{P_-}{c}\right)s(t) \qquad (4)$$

Ruas kanan persamaan (4) dapat ditulis dengan :

$$-i\left(P_+ + \frac{P_-}{c}\right)cD\left(P_+ + \frac{P_-}{c}\right)s(t) - i\left(P_+ + \frac{P_-}{c}\right)mc^2(\tau-1)\left(P_+ + \frac{P_-}{c}\right)s(t) -$$

$$i\left(P_{+}+\frac{P_{-}}{c}\right)V\left(P_{+}+\frac{P_{-}}{c}\right)s(t). \tag{5}$$

Penghitungan selanjutnya dikerjakan untuk masing-masing suku persamaan (5) :
Diperhatikan suku ke-1 persamaan (5)

$$\left(P_{+}+\frac{P_{-}}{c}\right)cD\left(P_{+}+\frac{P_{-}}{c}\right)s(t)=\left(cP_{+}DP_{+}+P_{-}DP_{+}+P_{+}DP_{-}+P_{-}D\frac{P_{-}}{c}\right)s(t)$$

$$=\left(cP_{+}P_{-}D+P_{-}P_{-}D+P_{+}P_{+}D+\frac{P_{-}P_{+}D}{c}\right)s(t)=\left(P_{-}D+P_{+}D\right)s(t)=Ds(t). \tag{6}$$

Diperhatikan suku ke-2 persamaan (5) :

$$\left(P_{+}+\frac{P_{-}}{c}\right)mc^{2}(\tau-1)\left(P_{+}+\frac{P_{-}}{c}\right)s(t)$$

$$=\{(P_{+}mc^{2}(\tau-1)P_{+}+P_{-}mc(\tau-1)P_{+}+P_{+}mc(\tau-1)P_{-}+P_{-}m(\tau-1)P_{-}\}s(t)$$

$$=\left(-2mc^{2}P_{+}P_{-}P_{+}-2mcP_{-}P_{-}P_{+}-2mcP_{+}P_{-}P_{-}-2mP_{-}\right)s(t)=-2mP_{-}s(t). \tag{7}$$

Diperhatikan suku ke-3 persamaan (5):

$$\left(P_{+}+\frac{P_{-}}{c}\right)V\left(P_{+}+\frac{P_{-}}{c}\right)s(t)=\left(P_{+}VP_{+}+\frac{P_{-}}{c}VP_{+}+P_{+}V\frac{P_{-}}{c}+\frac{P_{-}}{c}V\frac{P_{-}}{c}\right)s(t)$$

Selanjut

$$=\left(P_{+}V+\frac{P_{-}P_{+}V}{c}+\frac{P_{+}P_{-}V}{c}+\frac{P_{-}V}{c^{2}}\right)s(t)=\left(P_{+}V+\frac{VP_{-}}{c^{2}}\right)s(t). \tag{4.8}$$

nya Lemma dapat dibuktikan dengan persamaan 4,6,.7dan 8.■

Diperhatikan Lemma 2, jika $c\to\infty$ maka didapat :

$$\frac{d}{dt}P_{+}s(t)=-i(D+VP_{+}-2mP_{-})s(t), \qquad s(t)\in D(D). \tag{9}$$

Persamaan ini merupakan masalah Cauchy abstrak (3.1), dengan

$$A=-i\left(D+VP_{+}-2mP_{-}\right) \text{ dan } M=P_{+}. \tag{10}$$

Karena P_{+} merupakan operator proyeksi self adjoint maka M merupakan operator self adjoint dan terbatas.

Perlu diingat bahwa $P\mathrm{H}=Ker\,M$, $P^{T}\mathrm{H}=(Ker\,M)^{\perp}$ dan $Q\mathrm{H}=Ker\,M^{*}, Q^{T}\mathrm{H}=(Ker\,M)^{\perp}$. Karena $M=P_{+}$ merupakan operator self adjoint, maka $P\mathrm{H}$ = $Q\mathrm{H}$ = $Ker\ M$ dan $P^{T}\mathrm{H}=Q^{T}\mathrm{H}=(Ker\,M)^{\perp}$. Disamping itu karena $M=P_{+}$ juga merupakan proyeksi ortogonal maka $\mathrm{H}=P_{+}\mathrm{H}\oplus P_{-}\mathrm{H}=(Ker\,M)^{\perp}\oplus Ker\,M$. Dengan mengingat bahwa ruang Hilbert H dapat dinyatakan sebagai hasil jumlahan langsung dari $Ker\,M\ dan\ (Ker\,M)^{\perp}$, serta untuk setiap anggota H dapat dinyatakan secara tunggal dengan anggota $Ker\,M\ dan\ (Ker\,M)^{\perp}$, maka berakibat $P=Q=P_{-}$ dan $P^{T}=Q^{T}=P_{+}$.

KESIMPULAN

Untuk menyelesaikan persamaan Dirac abstrak yang merupakan bentuk masalah Cauchy degenerate dapat dilakukan dengan terlebih dahulu mereduksi ke masalah Cauchy nondegenerate. Hal ini dapt dilakukan dengan menggunakan beberapa asumsi-asumsi yang dibahas dalam ruang Hilbert dan suatu tranformasi tertentu, sehingga dapat direduksi ke bentuk berikut:

$$\frac{d}{dt}P_{+}s(t)=-i(D+VP_{+}-2mP_{-})s(t),$$

$s(t) \in D(D)$. Persamaan ini meru-pakan masalah Cauchy abstrak, dengan $A = -i(D + VP_+ - 2mP_-)$ dan $M = P_+$, dimana M merupakan operator yang invertibel.

DAFTAR PUSTAKA

1. Kappel, F. & Schappacher, W., 2000, *Strongly Continuous Semigroups, An Introduction*.
2. Pazy, A., 1983, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York.
3. Thaller, B. & Thaller, S., 1996, *Factorization of Degenerate Cauchy Problems : The Linear Case*, J. Operator Theory, 121-146.
4. Weidman, J., 1980, *Linear Operators in Hilbert Spaces*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York .
5. Hariyanto Susilo, 2005, *Reduksi Masala Cauchy Abstrak Degenerate ke Masalah Cauchy Abstrak Non Degenerate*, Jurnal Matematika Vol 8, No 1 April 2005; Hal: 33-36
6. Hariyanto Susilo, 2006, *Penyelesaian Masalah Cauchy Degenerate dengan Mereduksi ke Bentuk Masalah Cauchy Nondegenerate,* Jurnal Sains & Matematika Vol. 14, No. 4, Oktober 2006; Hal: 141-145