

## ANALISIS KESTABILAN PERSAMAAN DIFERENSI TAK LINIER

Indah Uswatun<sup>1</sup>, Sutimin<sup>2</sup>

Program Studi Matematika Jurusan Matematika FMIPA UNDIP  
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H., Semarang, 50275  
sutimin@undip.ac.id

**ABSTRAK**—Analisis kestabilan dari persamaan diferensi tak linier dilakukan melalui uji teorema yaitu dengan menyelidiki titik setimbang  $x^*$ . Analisis kestabilan dari fungsi diferensi  $f$  dalam teorema-teorema yang telah dikaji menunjukkan bahwa jika  $|f'(x^*)| < 1$  berarti titik setimbang stabil asimtotik, sedangkan jika  $|f'(x^*)| > 1$  maka titik setimbang tidak stabil, kemudian jika  $|f'(x^*)| = 1$ , kestabilan dari titik setimbang belum bisa disimpulkan. Di sini akan dikaji kestabilan dari titik setimbang pada kasus dimana  $|f'(x^*)| = 1$ . Kajian dilakukan dengan memperhitungkan faktor  $f''(x^*)$  dan  $f'''(x^*)$  sehingga pada akhirnya dapat disimpulkan kestabilan dari titik setimbang  $x^*$ . Analisis kestabilan juga dapat dilakukan dengan diagram *Cobweb*. Untuk persamaan diferensi logistik, kestabilan titik setimbang bergantung pada nilai dari parameter  $\mu$ .

*Kata kunci: kestabilan, persamaan diferensi, titik setimbang, diagram Cobweb.*

### PENDAHULUAN

Pada dasarnya, pertumbuhan makhluk hidup pada suatu populasi merupakan proses yang berlangsung secara diskret, di mana pengukurannya dilakukan setiap selang waktu tertentu. Untuk menggambarkan proses tersebut secara matematis, digunakan persamaan diferensi yang menggambarkan hubungan ketergantungan antara jumlah populasi pada sistem

dinamik adalah mempelajari perilaku dari solusi sistem di sekitar titik setimbang (Elaydi, 1996). Untuk mempelajari perilaku dari solusi sistem tersebut digunakan suatu pendekatan yang disebut analisis kestabilan. Analisis ini dapat dilakukan dengan beberapa cara seperti melakukan penyelidikan terhadap perilaku titik setimbang dari persamaan diferensi. Titik setimbang dan kestabilannya dapat memberikan informasi mengenai perilaku solusi dari persamaan diferensi tak linear. Perilaku titik setimbang  $x^*$  dapat diselidiki melalui turunan dari persamaan diferensi  $f$  pada titik  $x^*$ , kondisi kestabilan dari titik setimbang  $x^*$  dapat ditentukan dari beberapa kriteria  $f'(x^*)$ , antara lain pada saat  $f'(x^*) < 1$ ,  $f'(x^*) > 1$

waktu yang berturut-turut. Sebagian besar model perkembangan dan pertumbuhan makhluk hidup mengikuti kaidah yang berkaitan dengan bentuk-bentuk dari fungsi non-linier, salah satu contoh model pertumbuhan ini adalah model pertumbuhan logistik.

Salah satu tujuan utama dari

, dan  $|f'(x^*)| = 1$ . Telah banyak pembahasan mengenai kestabilan dari titik setimbang pada kondisi di mana  $f'(x^*) < 1$  dan  $f'(x^*) > 1$ , sedangkan pada saat  $|f'(x^*)| = 1$  belum dapat disimpulkan kestabilan dari titik setimbang. Oleh karena itu, dikembangkan kajian kestabilan yang memenuhi kasus  $|f'(x^*)| = 1$  karena stabil tidaknya suatu permasalahan persamaan diferensi harus diketahui. Selain melakukan penyelidikan terhadap perilaku titik setimbang dari persamaan diferensi, analisis kestabilan juga dapat dilakukan melalui metode grafikal.

### TITIK SETIMBANG

Persamaan diferensi tak linier mempunyai bentuk  $f\left(\frac{x(n+1)}{x(n)}, n\right) = 0$ .

Analisis kestabilan dari persamaan diferensi tak linier dikaji melalui penyelidikan terhadap titik setimbang. Berikut ini diberikan penjelasan mengenai titik setimbang.

#### Definisi 2.1

Suatu titik  $x^*$  dalam domain  $f$  merupakan titik setimbang persamaan

$$x(n+1) = f(x(n)) \quad (1)$$

jika titik ini merupakan titik tetap  $f$ , yaitu  $f(x^*) = x^*$ .

Dalam grafik, titik setimbang adalah koordinat  $x$  pada titik di mana grafik  $f$  berpotongan dengan garis diagonal bersudut  $45^\circ$   $y = x$ .

#### Definisi 2.2

Jika  $x$  adalah sebuah titik pada domain  $f$ . Jika ada bilangan bulat positif  $r$  dan titik setimbang  $x^*$  dari persamaan (3.1.1) sedemikian sehingga  $f^r(x) = x^*$ , dan  $f^{r-1}(x) \neq x^*$ , maka  $x$  adalah titik setimbang yang dihasilkan.

#### Definisi 2.1.1

a. Titik setimbang  $x^*$  dikatakan stabil jika diberikan  $\varepsilon > 0$ , ada  $\delta > 0$  sedemikian sehingga untuk sebarang  $x$  dan  $n > 0$ ,  $|x - x^*| < \delta$  menyebabkan

$$|f^n(x) - x^*| < \varepsilon \text{ untuk semua } n > 0.$$

Titik setimbang  $x^*$  tidak stabil jika ada  $\varepsilon > 0$  sedemikian sehingga untuk sebarang  $\delta > 0$ , maka ada  $x$  dan  $n$  sedemikian sehingga  $|x - x^*| < \delta$  dan  $|f^n(x) - x^*| \geq \varepsilon$ .

b. Titik  $x^*$  dikatakan atraktif jika ada  $\eta > 0$  sedemikian sehingga  $|x(0) - x^*| < \eta$  menyebabkan  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = x^*$ .

Jika  $\eta = \infty$ ,  $x^*$  disebut global atraktor.

c. Titik  $x^*$  dikatakan titik setimbang stabil asimtotik jika stabil dan atraktif. Jika  $\eta = \infty$ , maka  $x^*$  dikatakan titik setimbang stabil asimtotik global.

Teorema-teorema di bawah ini menjelaskan mengenai kriteria kestabilan asimtotik pada titik setimbang.

#### Teorema 2.2.1

Jika  $x^*$  adalah titik setimbang dari persamaan diferensi

$$x(n+1) = f(x(n)) \quad (2)$$

dimana  $f$  terdiferensial secara kontinu pada  $x^*$ . Maka pernyataan berikut berlaku:

- i. Jika  $|f'(x^*)| < 1$ , maka  $x^*$  stabil asimtotik.
- ii. Jika  $|f'(x^*)| > 1$ , maka  $x^*$  tidak stabil.

#### Teorema 2.2.2

Misalkan  $x^*$  adalah titik setimbang dengan  $f'(x^*) = 1$ . Maka pernyataan berikut ini berlaku:

- i. Jika  $f''(x^*) \neq 0$ , maka  $x^*$  tidak stabil.
- ii. Jika  $f''(x^*) = 0$  dan  $f'''(x^*) > 0$ , maka  $x^*$  tidak stabil.
- iii. Jika  $f''(x^*) = 0$  dan  $f'''(x^*) < 0$ , maka  $x^*$  stabil asimtotik.

Untuk kasus dimana  $f'(x^*) = -1$ , digunakan teorema sebagai berikut:

#### Teorema 2.2.3

Misalkan untuk titik setimbang  $x^*$  berlaku  $f'(x^*) = -1$  dan

$$S(x^*) = -f'''(x^*) - \frac{3}{2}[f''(x^*)]^2 \quad (3)$$

Maka  $x^*$  stabil asimtotik jika  $S(x^*) < 0$  dan  $x^*$  tidak stabil jika  $S(x^*) > 0$ .

#### Definisi 2.3.1

Jika  $b$  berada pada domain  $f$ . Maka:

- i.  $b$  disebut titik periodik dari  $f$  jika  $f^k(b) = b$  untuk suatu  $k \in \mathbb{N}$ .

Orbit periodik dari  $b$ ,  $O(b) = \{b, f(b), f^2(b), \dots, f^{k-1}(b)\}$  disebut *cycle-k*.

ii.  $b$  disebut periodik- $k$  yang terbentuk jika untuk suatu bilangan bulat positif  $m$ ,  $f^m(b)$  adalah titik periodik  $k$ . Dengan kata lain,  $b$  adalah periodik  $k$  yang terbentuk jika  $f^{m+k}(b) = f^m(b)$ .

**Definisi 2.3.2**

Jika  $b$  adalah titik periodik  $k$  dari  $f$ . Maka  $b$  adalah

- i. Stabil jika titik tersebut adalah titik tetap stabil dari  $f^k$ .
- ii. Stabil asimtotik jika titik tersebut adalah titik tetap stabil asimtotik dari  $f^k$ .
- iii. Tidak stabil jika titik tersebut adalah titik tetap tidak stabil dari  $f^k$ .

**Teorema 2.3.1**

Jika

$O(b) = \{x(0) = b, x(1) = f(b), \dots, x(k-1) = f^{k-1}(b)\}$  adalah cycle- $k$  dari sebuah fungsi  $f$  yang terdifferensial secara kontinu. Maka pernyataan-pernyataan berikut berlaku:

- i. Cycle- $k$   $O(b)$  stabil asimtotik jika  $|f'(x(0))f'(x(1))\dots f'(x(k-1))| < 1$ .
- ii. Cycle- $k$   $O(b)$  tidak stabil jika  $|f'(x(0))f'(x(1))\dots f'(x(k-1))| > 1$ .

**PERSAMAAN DIFERENSI LOGISTIK**

Misalkan  $N(t+1)$  menyatakan populasi spesies pada tahun  $t+1$  dan  $N(t)$  menyatakan populasi pada tahun sebelumnya. Maka populasi  $N(t+1)$  adalah fungsi dari  $t$  dan  $N(t)$ , yaitu:

$$N(t+1) = f(t, N(t)), \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

(4)

$$N(t + \Delta t) - N(t) = \Delta t N(t) \left[ r - r \frac{N(t)}{K} \right], \quad (7)$$

dengan  $K = \frac{r}{a}$ .

Selanjutnya dengan mengasumsikan bahwa fungsi  $f$  pada persamaan (4) hanya bergantung pada  $N(t)$  dan tidak bergantung pada  $t$ , maka persamaan (4) menjadi:

$$N(t+1) = f(N(t)), \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Pembahasan dibatasi pada kasus persamaan diferensi logistik. Persamaan diferensi logistik mempunyai bentuk yang analog dengan persamaan differensial logistik, yaitu:

$$\frac{dN}{dt} = r N \left( 1 - \frac{N}{K} \right),$$

dengan,  $r$  = laju pertumbuhan populasi  
 $N$  = jumlah populasi pada saat waktu  $t$

$K$  = carrying capacity

Nilai  $r$  dan  $K$  biasanya didapatkan secara eksperimental. Definisi laju pertumbuhan populasi yang bergantung waktu adalah

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t N(t)} = R(N(t)),$$

(6)

dengan laju pertumbuhan diukur sepanjang interval waktu  $\Delta t$  yang bergantung terhadap populasi  $N(t)$ ,  $\Delta t$  sering disebut sebagai waktu diskretisasi, yaitu waktu diskret dimana perubahan yang terjadi dihitung. Jika terdapat faktor keterbatasan, maka laju pertumbuhan menurun seiring dengan bertambahnya populasi, situasi ini dapat dimodelkan menggunakan persamaan logistik diskret

$N(t + \Delta t) - N(t) = \Delta t N(t) [r - a N(t)]$ ,  
 atau secara ekuivalen dapat ditulis



Selanjutnya apabila  $N(t)$  diukur setiap tahun ( $\Delta t = 1$ ). Penyelesaian persamaan (7) dapat dilakukan dengan penghitungan solusi secara numerik. Dengan mengambil notasi

$$t \equiv n \Delta t, \quad \text{dan}$$

$$N(t) = N(n \Delta t) = N(n),$$

Maka persamaan (7) menjadi

$$N(n+1) - N(n) = N(n) \left[ r - r \frac{N(n)}{K} \right],$$

$$N(n+1) = (1+r) N(n) \left[ 1 - \frac{N(n)r}{K(1+r)} \right],$$

$$N(n+1) = \mu N(n) \left[ 1 - \frac{N(n)}{k} \right], \quad (8)$$

dengan  $\mu = 1+r$  dan  $k = \frac{K(1+r)}{r}$ . Bila

dimisalkan  $x(n) = \frac{N(n)}{k}$ , maka persamaan (8) menjadi:

$$x(n+1) = \mu x(n) (1 - x(n)). \quad (9)$$

dengan,  $x(n+1)$  = jumlah populasi pada saat  $(n+1)$

$x(n)$  = jumlah populasi pada saat

$n$

$\mu$  = parameter positif

### KESTABILAN PERSAMAAN DIFERENSI LOGISTIK

Persamaan diferensi logistik mempunyai bentuk seperti pada persamaan (9), yaitu:

$$x(n+1) = \mu x(n) (1 - x(n)), \quad x(n) \in [0,1], \mu > 0 \quad (10)$$

Persamaan tersebut muncul dari pengiterasian fungsi  $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ .

Analisis kestabilan persamaan diferensi logistik pertama-tama dilakukan dengan menentukan titik setimbang dari persamaan (10). Titik setimbang dari

persamaan (10) diperoleh dengan menyelesaikan persamaan:

$$F_\mu(x^*) = x^*$$

$$(11)$$

Sehingga,

$$F_\mu(x^*) = x^*$$

$$\Leftrightarrow \mu x^*(1-x) = x^*$$

$$\Leftrightarrow x^*_1 = 0 \text{ dan } x^*_2 = \frac{\mu-1}{\mu} \quad (12)$$

Selanjutnya, untuk menentukan kestabilan dari titik-titik setimbang, digunakan teorema 2.2.1. Analisis dilakukan secara terpisah untuk masing-masing titik setimbang, yaitu:

(1). Untuk titik setimbang  $x^*_1 = 0$

Untuk mengetahui kestabilan dari titik setimbang  $x^*_1 = 0$ , digunakan teorema 2.2.1 yaitu dengan menghitung turunan pertama dari persamaan diferensi logistik untuk nilai  $x^*_1 = 0$ , yaitu:

$$F'_\mu(x) = \frac{d}{dx} F_\mu(x) = \frac{d}{dx} \mu x(1-x) = \mu(1-x) - \mu x$$

$$F'_\mu(x) = \mu(1-2x)$$

$$(13)$$

$$F'_\mu(x^*) = F'_\mu(0) = \mu \quad (14)$$

Berdasarkan teorema 2.2.1, titik setimbang  $x^*$  stabil asimtotik jika  $|f'(x^*)| < 1$ , dan tidak stabil jika  $|f'(x^*)| > 1$ . Untuk  $x^*_1 = 0$ , maka

a.  $x^*_1 = 0$  stabil asimtotik bila  $|F'_\mu(x^*)| < 1$ ,

Dari persamaan (14) diperoleh  $F'_\mu(0) = \mu$ , sehingga  $x^* = 0$

stabil asimtotik bila

$$|\mu| < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 < \mu < 1$$

Karena syarat yang harus dipenuhi pada persamaan (10) adalah  $\mu > 0$

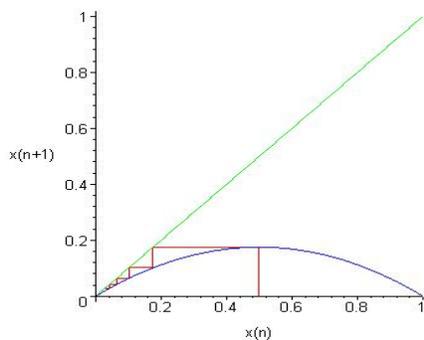
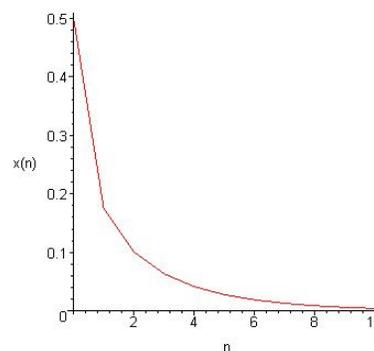


Diagram Cobweb untuk  $F_\mu(x)$  dengan  $\mu = 0.7, x_0 = 0.5$

maka  $x^*_1 = 0$  stabil asimtotik pada interval  $0 < \mu < 1$ .



Grafik  $F_\mu(x)$  dengan  $\mu = 0.7, x_0 = 0.5$

b.  $x^*_1 = 0$  tidak stabil bila  $|F'_\mu(x^*)| > 1$ ,

Dari persamaan (14) diperoleh  $F'_\mu(0) = \mu$ , sehingga  $x^*_1 = 0$  tidak stabil bila

$$|\mu| > 1$$

$$\Leftrightarrow \mu < -1 \text{ atau } \mu > 1$$

Karena syarat yang harus dipenuhi pada persamaan (10) adalah  $\mu > 0$  maka  $x^*_1 = 0$  tidak stabil saat  $\mu > 1$ .

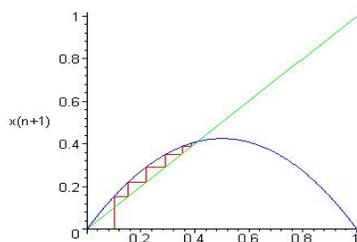
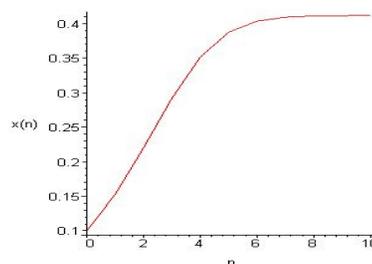


Diagram Cobweb untuk  $F_\mu(x)$  dengan  $\mu = 1.7, x_0 = 0.1$



Grafik  $F_\mu(x)$  dengan  $\mu = 1.7, x_0 = 0.1$

c. Untuk  $\mu = 1$ ,  
Dari persamaan (13) diperoleh  $F'_\mu(x) = \mu(1-2x)$  sehingga nilai  $F'_1(x^*) = 1$ .  
Karena  $F'_1(x^*) = 1$ , maka penyelidikan kestabilan dari  $x^*_1 = 0$  menggunakan teorema 2.2.2, yaitu dengan menyelidiki turunan kedua dan ketiga dari  $F_\mu(x^*)$ .

$$F''_\mu(x) = -2\mu$$

$$(15) \\ F'''_\mu(x) = 0$$

(16)  
Maka,  $F''_\mu(x^*) = F''_1(0) = -2 \neq 0$   
sehingga menurut teorema 2.2.2,  $x^* = 0$  tidak stabil untuk  $\mu = 1$ .

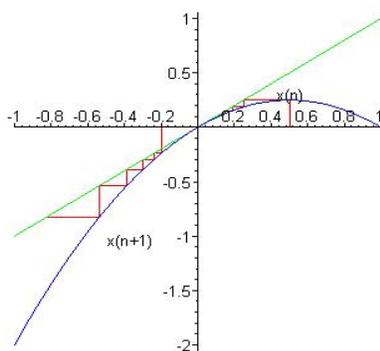
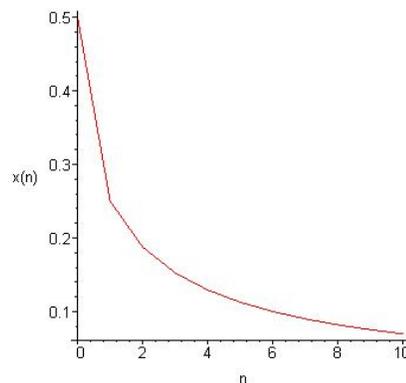


Diagram Cobweb untuk  $F_\mu(x)$  dengan  $\mu = 1, x_{0-1} = 0.5$  dan  $x_{0-2} = -0.2$



Grafik  $F_\mu(x)$  dengan  $\mu = 1, x_0 = 0.5$

(2). Untuk titik setimbang  $x^*_2 = \mu - 1/\mu$   
Pada titik setimbang  $x^*_2 = \mu - 1/\mu$ , jika  $x(n) \in [0,1]$  maka syarat yang harus dipenuhi adalah  $\mu > 1$ .  
Untuk mengetahui kestabilan dari titik setimbang  $x^*_2 = \mu - 1/\mu$ , digunakan teorema 2.2.1 yaitu dengan menghitung turunan pertama dari persamaan diferensial logistik untuk nilai  $x^*_2 = \mu - 1/\mu$ . Dari persamaan (13) diperoleh  $F'_\mu(x) = \mu(1-2x)$  sehingga

$$F'_\mu(x^*) = F'_\mu\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right) = \mu\left(1-2\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)\right) = 2-\mu.$$

Maka:

a.  $x^*_2 = \mu - 1/\mu$  stabil asimtotik bila

$$\left|F'_\mu(x^*)\right| = \left|F'_\mu\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)\right| = |2-\mu| < 1$$

(17) Penyelesaian persamaan (17) adalah  $1 < \mu < 3$ .

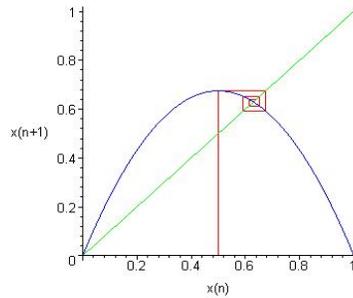
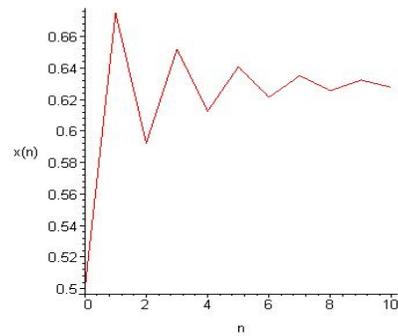


Diagram Cobweb untuk  $F_\mu(x)$  dengan  $\mu = 2.7, x_0 = 0.5$



Grafik  $F_\mu(x)$  dengan  $\mu = 2.7, x_0 = 0.5$

b.  $x^*_2 = \mu - 1/\mu$  tidak stabil bila

$$|F'_\mu(x^*)| = \left| F'_\mu\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right) \right| = |2-\mu| > 1$$

(18) Penyelesaian dari persamaan (18) adalah:

$$\begin{aligned} 2-\mu < -1 & \Leftrightarrow \mu > 3 & \text{Atau} & & 2-\mu > 1 & \Leftrightarrow \mu < 1 \end{aligned}$$

Untuk  $\mu < 1$ , nilai tersebut tidak memenuhi syarat karena untuk titik setimbang  $x^*_2 = \mu - 1/\mu$ , jika  $x(n) \in [0,1]$  maka syarat yang harus dipenuhi adalah  $\mu > 1$ .

Jadi,  $x^*_2 = \mu - 1/\mu$  tidak stabil ketika  $\mu > 3$ .

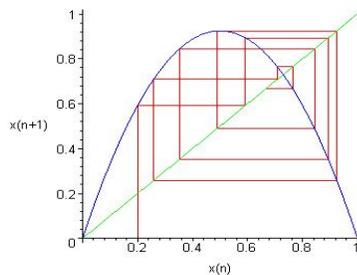
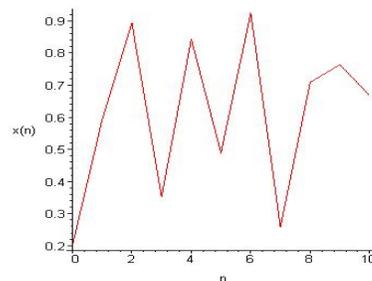


Diagram Cobweb untuk  $F_\mu(x)$  dengan  $\mu = 3.7, x_0 = 0.2$



Grafik  $F_\mu(x)$  dengan  $\mu = 3.7, x_0 = 0.2$

c. Untuk  $\mu = 3$ ,

Dari persamaan (13) diperoleh  $F'_\mu(x) = \mu(1-2x)$  sehingga nilai  $F'_3(x^*) = -1$ . Karena  $F'_3(x^*) = -1$ , penyelidikan kestabilan dari titik setimbang  $x^*_2 = \frac{\mu-1}{\mu}$  menggunakan teorema 2.2.3, yaitu dengan menyelidiki nilai dari  $S(x^*) = -f''''(x^*) - \frac{3}{2}[f''(x^*)]^2$ . Turunan kedua dan ketiga dari  $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$  diperoleh dari persamaan (15) dan (16) yaitu:  $F''_\mu(x) = -2\mu$ , dan  $F'''_\mu(x) = 0$ ,

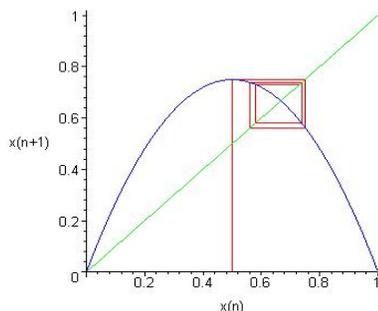


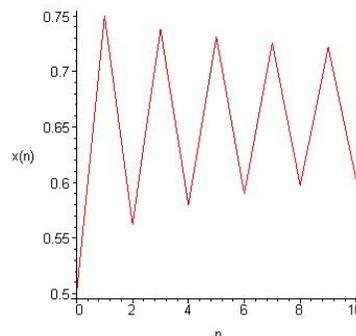
Diagram Cobweb untuk  $F_\mu(x)$  dengan  $\mu = 3, x_0 = 0.5$

### Analisis Kestabilan Pada Cycle – 2 dari Persamaan Diferensi Logistik

Cycle – 2 dari persamaan diferensi logistik merupakan titik tetap dari iterasi kedua persamaan diferensi logistik  $F^2_\mu(x) = F(F_\mu(x))$ . Berikut ini akan dijelaskan terbentuknya cycle – 2 dari persamaan diferensi logistik serta kestabilan dari titik setimbangnya.

Pada cycle-2, persamaan yang terbentuk adalah  $F^2_\mu(x) = F(F_\mu(x))$  yaitu:

Maka  $F''_3(x^*) = F''_3\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right) = -6$  dan  $F'''_3(x^*) = F'''_3\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right) = 0$ . maka menurut teorema 2.2.3,  $S(x^*) = -f''''(x^*) - \frac{3}{2}[f''(x^*)]^2 = -F''''_\mu(x^*) - \frac{3}{2}[F''_\mu(x^*)]^2 = -54 < 0$  Karena  $S(x^*) < 0$  maka menurut teorema 2.2.3,  $x^*$  stabil asimtotik pada  $\mu = 3$ .



Grafik  $F_\mu(x)$  dengan  $\mu = 3, x_0 = 0.5$

$$F^2_\mu(x) = \mu^2 x(1-x)[1-\mu x(1-x)] \quad (19)$$

Analisis kestabilan pada cycle-2 dilakukan dengan menentukan titik setimbang dari  $F^2_\mu(x)$ . Titik setimbang dari  $F^2_\mu(x)$  diperoleh dengan menyelesaikan persamaan (11):

$$F^2_\mu(x^*) = x^* \Leftrightarrow \mu^2 x^*(1-x^*)[1-\mu x^*(1-x^*)] - x^* = 0 \quad (20)$$

$$\Leftrightarrow -x^*(\mu x^*+1-\mu)(\mu^2(x^*)^2-\mu^2x^*-\mu x^*+\mu+1)=0 \Leftrightarrow x^*_4 = \frac{(1+\mu)+\sqrt{(\mu-3)(\mu+1)}}{2\mu} \quad (21)$$

Dua faktor yang pertama yaitu  $x^*$  dan  $(\mu x^*+1-\mu)$  merupakan solusi periode-1 persamaan diferensi logistik, dan  $\mu^2(x^*)^2-\mu(\mu+1)x^*+\mu+1=0$  merupakan solusi periode-2 dari persamaan diferensi logistik. Maka, *cycle-2* dari persamaan diferensi logistik merupakan penyelesaian dari persamaan:

$$\mu^2(x^*)^2-\mu(\mu+1)x^*+\mu+1=0 \quad (22)$$

$$\Leftrightarrow x^*_3, x^*_4 = \frac{-(-\mu(\mu+1)) \pm \sqrt{(-\mu(\mu+1))^2 - 4\mu^2(\mu+1)}}{2\mu^2}$$

$$\Leftrightarrow x^*_3 = \frac{(1+\mu)-\sqrt{(\mu-3)(\mu+1)}}{2\mu} \quad (23)$$

Dengan menggunakan sifat nilai mutlak maka persamaan (26) menjadi:

$$\begin{aligned} & -1 < \mu^2(1-2x^*_3)(1-2(x^*_4)) < 1 \\ \Leftrightarrow & -1 < \mu^2 \left( 1 - \left( \frac{(1+\mu)-\sqrt{(\mu-3)(\mu+1)}}{\mu} \right) \right) \left( 1 - \left( \frac{(1+\mu)+\sqrt{(\mu-3)(\mu+1)}}{\mu} \right) \right) < 1 \\ \Leftrightarrow & -1 < -\mu^2 + 2\mu + 4 < 1 \end{aligned} \quad (27)$$

Penyelesaian persamaan (27) adalah:

- $-\mu^2 + 2\mu + 4 > -1$   
 $\Leftrightarrow 1 - \sqrt{6} < \mu < 1 + \sqrt{6}$
- $-\mu^2 + 2\mu + 4 < 1$   
 $\Leftrightarrow \mu < -1$  atau  $\mu > 3$

Dua akar pada persamaan (23) dan (24) bernilai riil bila  $\mu > 3$ , sehingga *cycle-2* ada asalkan  $\mu > 3$ .

Selanjutnya untuk menganalisis kestabilan pada *cycle-2*, digunakan teorema 2.3.1. Dari teorema tersebut, *cycle-2* stabil asimtotik jika

$$|F'_\mu(x^*_3)F'_\mu(x^*_4)| < 1 \quad (25)$$

karena  $F'_\mu(x) = \mu(1-2x)$ , maka persamaan (25) menjadi:

$$|\mu(1-2x^*_3)\mu(1-2x^*_4)| < 1 \quad (26)$$

maka himpunan penyelesaian dari persamaan (27) adalah  $3 < \mu < 1 + \sqrt{6} \approx 3.44949$ . Jadi, *cycle-2* stabil asimtotik jika nilai  $\mu$

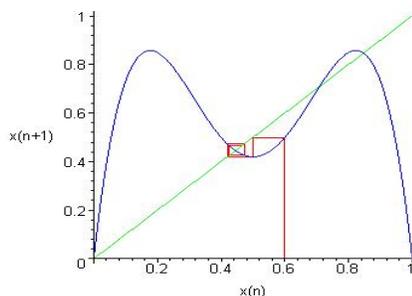
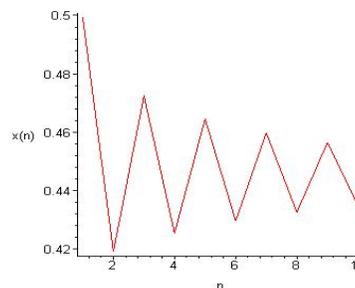


Diagram Cobweb untuk  $F_\mu(x)$  dengan  $\mu = 3.43, x_0 = 0.6$

berada pada interval  $3 < \mu < 1 + \sqrt{6} \approx 3.44949$ .



Grafik  $F_\mu(x)$  dengan  $\mu = 3.43, x_0 = 0.6$

## SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa analisis kestabilan dari model persamaan diferensi tak linier dikaji melalui uji teorema, yaitu dengan menyelidiki titik setimbang  $x^*$  dari persamaan diferensi  $f$ . Uji teorema-teorema tersebut menunjukkan bahwa jika  $|f'(x^*)| < 1$  maka titik setimbang stabil asimtotik, jika  $|f'(x^*)| > 1$  maka titik setimbang tidak stabil, dan jika  $|f'(x^*)| = 1$  maka kestabilan dari titik setimbang belum dapat disimpulkan. Untuk kasus  $|f'(x^*)| = 1$ , kestabilan ditinjau dengan memperhitungkan faktor  $f''(x^*)$  dan  $f'''(x^*)$ .

Kestabilan dari persamaan diferensi logistik bergantung dari nilai parameter  $\mu$ . Persamaan diferensi logistik ini mempunyai dua titik setimbang yaitu 0 dan  $\mu - 1/\mu$ . Titik setimbang 0 stabil asimtotik pada interval  $0 < \mu < 1$ , sedangkan titik setimbang  $\mu - 1/\mu$  stabil asimtotik pada  $1 < \mu \leq 3$ .

Dari grafik persamaan diferensi logistik terlihat bahwa untuk  $\mu < 1$ , bila  $n \rightarrow \infty$  maka  $x(n) \rightarrow 0$  yang berarti bahwa jumlah populasi makin lama makin menurun

dan menuju kepada kepunahan. Untuk  $1 < \mu < 3$ , jumlah populasi pada akhirnya menuju pada keadaan setimbang, dan untuk  $3 < \mu < 1 + \sqrt{6} \approx 3.44949$ , jumlah populasi selalu berosilasi diantara dua nilai dan bersifat stabil. Untuk nilai  $\mu$  yang lebih besar lagi, pertumbuhan populasi menunjukkan suatu keadaan yang kacau dan tidak beraturan.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Banasiak, J., 2008. *Notes On Mathematical Biology*. Durban: University of Kwazulu-Natal. (<http://users.aims.ac.za/~geofrey/MBlectnotes291008.pdf>, diakses terakhir pada 19 Agustus 2009).
- [2] Boyce, W., and R. Diprima. 1992. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problem*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- [3] Brown, D., and P. Rothery. 1994. *Models in Biology: Mathematics, Statistics and Computing*. England: John Wiley & Sons, Ltd.

- [4] Cheng, A. K., 2006. *Differential Equation, Models and Method*. Singapore: Mc Graw Hill.
- [5] Devaney and L. Robert. 1992. *A First Course In Chaotic Dynamical Systems, Theory and Experiment*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company Inc.
- [6] Elaydi, S. N., 1996. *An Introduction to Difference Equations*. New York: Springer.
- [7] Haberman, R., 1998. *Mathematical Models: Mechanical Vibrations, Population Dynamics, and Traffic Flow*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [8] Kosala, D. P., 2000. *Model Pertumbuhan Populasi dengan Memodifikasi Model Pertumbuhan Logistik*. Majalah Matematika dan Statistika volume I no. I, Oktober 2000: 21-29.
- [9] Mickens, R. E., 1990. *Difference Equations, second edition*. New York: Van Nostrand Reinhold.
- [10] Murray, J. D., 1989. *Mathematical Biology, second correct edition*. USA: Springer.
- [11] Purcell, E. J., and D. Varberg. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis, jilid 1*. a.b. Susila, Kartasasmita, dan Rawuh. Jakarta: Penerbit Erlangga.
- [12] Tarumingkeng, R. C., 1994. *Dinamika Populasi, Kajian Ekologi Kuantitatif*. Jakarta: Pustaka Sinar Harapan dan Universitas Kristen Krida Wacana.
- [13] Thomas, G., and R. Finney. 1986. *Kalkulus dan Geometri Analitik, edisi keenam, jilid 1*. a.b. Silaban dan Wospakrik. Jakarta: Penerbit Erlangga.
-

