Jurnal Sains dan Matematika Vol. 20 (1): 5-10 (2012)

Penyelesaian Faktorisasi Koprima dengan Algoritma Euclid dan Metode Ruang Keadaan untuk Penentuan Pengendali yang Menstabilkan Sistem

Asmat dan Widowati
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Diponegoro
Jl. Prof. Soedharto, SH, Semarang 50275

ABSTRACT

Stability is the main requirement that must be met on the control system. If the plant from the control system is not stable, then the controller C can be searched so that the feedback system becomes internally stable. Let G be a transfer function represented by $G = \frac{N}{M}$, where N, M are coprime factorization and element of family of all stable, proper, real rational function. Functions N and M can be found by using Euclidean algorithm and the state space method. Further, we find controller, $C = \frac{X}{Y}$ that satisfy, NX + MY = I, so that the feedback system is internally stable. To verify the proposed method, numerical examples are given.

Keywords: Euclidean algorithm, coprime factorization, state space method, controller, stable

PENDAHULUAN

Sistem kontrol berumpan balik dari sistem linear yang tak berubah terhadap waktu (*linear time invariant system*) kontinu akan stabil bila *plant* pada sistem stabil. Yang dimaksud dengan plant disini adalah obyek yang dikendalikan. Apabila *plant* tidak stabil, maka harus dicari pengendali *C* yang dapat membuat sistem stabil internal [2]. Salah satu metode untuk mencari pengendali C adalah dengan menggunakan faktorisasi koprima (*coprime factorization*) yang dihitung dengan metode ruang keadaan.

Misalkan *G* adalah fungsi alih dari sistem yang disajikan dengan $G = \frac{N}{M}$, dimana *N*, *M* adalah faktorisasi koprima [6, 7] dan anggota keluarga fungsi real rasional, proper dan stabil maka dengan metode ruang keadaan akan didapat pengendali $C = \frac{X}{Y}$ yang memenuhi $NX + MY = 1$ yang membuat sistem berumpan balik stabil internal.

FUNGSI ALIH DARI SISTEM LINEAR

Perhatikan sistem linier yang tak berubah terhadap waktu, kontinu dan berdimensi terbatas. Dalam domain waktu, model masukan dan keluaran untuk sistem yang mempunyai bentuk persamaan

$$y = G * u, \quad (2.1)$$

adalah

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-\tau)u(\tau)d\tau, \quad (2.2)$$

untuk $t < 0$, $G(t) = 0$.

Jika $G(s)$ merupakan transformasi Laplace dari fungsi alih $G(t)$ maka $G(s)$ adalah rasional dan berdimensi berhingga dengan koefisien bilangan real. (Selanjutnya untuk penyederhanaan, penulisan $G(s)$ akan diringkas menjadi G).

Fungsi alih sistem linier parameter konstan didefinisikan sebagai perbandingan dari transformasi Laplace antara keluaran dan masukan dengan mengasumsikan bahwa semua syarat awal nol [5].

Fungsi alih dari sistem linear yang tak berubah terhadap waktu dengan satu masukan dan satu keluaran yang didefinisikan sebagai persamaan diferensial

$$a_0 \overset{n}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y =$$
$$b_0 \overset{n}{u} + b_1 \overset{(n-1)}{u} + \cdots + b_{n-1}\dot{u} + b_n u. \quad (2.3)$$

dengan y adalah keluaran dan u adalah masukan yaitu

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)},$$
$$= \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}. \quad (2.4)$$

Fungsi alih didefinisikan untuk sistem dengan satu masukan – satu keluaran(*Single Input- Single Output (SISO) system*) sedangkan untuk sistem dengan banyak masukan – banyak keluaran(*Multi Input- Multi Output (MIMO) system*) digunakan istilah matriks alih.

PARAMETERISASI PENGENDALI

Diberikan plant P yang stabil. Misalkan φ adalah keluarga fungsi real rasional, proper dan stabil. φ juga tertutup atas penjumlahan dan perkalian, jika $F, G \in \varphi$ maka $F + G, FG \in \varphi$ dan $1 \in \varphi$.

Teorema 1 [1].

Asumsikan bahwa $P \in \varphi$. Himpunan semua C untuk setiap sistem berumpan balik adalah stabil internal sama dengan

$$\left\{ \frac{Q}{1-PQ} : Q \in \varphi \right\}. \quad (3.1)$$

Bukti :

($\supset$) Andaikan C memenuhi kestabilan internal. Misalkan Q merupakan fungsi alih dari r ke u seperti ini

$$Q := \frac{C}{1-PC}, \quad (3.2)$$

maka $Q \in \varphi$ dan

$$C = \frac{Q}{1-PQ}. \quad (3.3)$$

($\subset$) Sebaliknya, andaikan $Q \in \varphi$ dan definisikan

$$C := \frac{Q}{1-PQ}. \quad (3.4)$$

Sistem berumpan balik stabil internal jika dan hanya jika semua fungsi alih yang merupakaan entri-entri dari matriks,

$$\frac{1}{1+PC}\begin{bmatrix} 1 & -P & -1 \\ C & 1 & -C \\ PC & P & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

adalah stabil dan proper. Substitusikan dengan persamaan (3.1) sehingga didapatkan

$$\begin{bmatrix} 1-PQ & -P(1-PQ) & -(1-PQ) \\ Q & 1-PQ & -Q \\ PQ & P(1-PQ) & 1-PQ \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Jelas bahwa sembilan entri-entri dalam matriks diatas dalam φ .

PENYELESAIAN FAKTORISASI KOPRIMA DENGAN ALGORITMA EUCLID

Misal G adalah fungsi alih real rasional. Persamaan G disajikan dalam bentuk

$$G = \frac{N}{M}, N, M \in \varphi, \quad (4.1)$$

dengan N dan M adalah faktorisasi koprima dari G. Secara umum, untuk mendapatkan N dan M dapat dilakukan dengan membagi polinomial pembilang dan penyebut dari G dengan $(s+1)^k$, dengan k merupakan derajat maksimum dari polinomial tersebut.

Dengan algoritma Euclid [3, 4], dapat dihitung hasil pembagian dari dua polinomial yang diberikan, misalkan $n(\lambda)$ dan $m(\lambda)$. Ketika n dan m adalah koprima, algoritma ini dapat digunakan untuk menghitung polinomial $x(\lambda)$ dan $y(\lambda)$ yang memenuhi persamaan

$$nx + my = 1. \quad (4.2)$$

Algoritma Euclid

Prosedur A

Masukan : polinomial $n(\lambda)$, $m(\lambda)$

Catatan : derajat (n) ≥ derajat (m), jika tidak, maka tukar posisi antara n dan m

Langkah 1

Bagi n dengan m untuk mendapatkan hasil bagi q_1 dan sisa r_1

$$n = m\, q_1 + r_1,$$
derajat r_1 < derajat m.

Langkah 2

Bagi m dengan $r_1$untuk mendapatkan hasil bagi q_2 dan sisa r_2

$$m = r_1q_2 + r_2,$$
derajat $r_2 <$ derajat r_1.

Langkah 3
Bagi r_1 dengan r_2 :

$$r_1 = r_2q_3 + r_3,$$
derajat $r_3 <$ derajat r_2.

Lanjutkan.
Hentikan pada langkah ke-k ketika r_k adalah konstanta bukan nol.

Contoh :
Diberikan

$$n(\lambda) = \lambda^3, m(\lambda) = 2\lambda^2 - 3\lambda + 1.$$

$$q_1(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda + \frac{3}{4},$$

$$r_1(\lambda) = \frac{7}{4}\lambda - \frac{3}{4},$$

$$q_2(\lambda) = \frac{8}{7}\lambda - \frac{60}{49},$$

$$r_2(\lambda) = \frac{4}{9}.$$

karena r_2 adalah konstanta bukan nol, maka langkah penyelesaian berhenti.
Persamaan

$$n = mq_1 + r_1,$$
$$m = r_1q_2 + r_2,$$

menghasilkan

$$r_2 = (1 + q_1 q_2)m - q_2n.$$

Diperoleh

$$x = -\frac{q_2}{r_2},$$

$$y = \frac{1 + q_1q_2}{r_2},$$

sehingga

$$x(\lambda) = -14\lambda + 15,$$

$$y(\lambda) = 7\lambda^2 + 3\lambda + 1.$$

Prosedur B
Masukan : G
Langkah 1
Jika G stabil, himpunan $N = G$, $M = 1$, $X = 0$, $Y = 1$, berhenti; jika tidak lanjutkan.

Langkah 2
Transformasikan $G(s)$ menjadi $\tilde{G}(\lambda)$ melalui pemetaan $s = (1 - \lambda)/\lambda$. Tulis $\tilde{G}$ sebagai perbandingan polynomial koprima,

$$\tilde{G}(\lambda) = \frac{n(\lambda)}{m(\lambda)}.$$

Langkah 3
Gunakan algoritma Euclid untuk mendapatkan polynomial $x(\lambda), y(\lambda)$ sedemikian hingga

$$nx + my = 1.$$

Langkah 4
Transformasikan $n(\lambda)$, $m(\lambda)$, $x(\lambda)$, $y(\lambda)$ menjadi $N(s)$, $M(s)$, $X(s)$, $Y(s)$ dengan pemetaan $\lambda = 1/(s + 1)$.

Contoh :
Diberikan

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s-1)}$$

Dengan algortitma Euclid prosedur B diperoleh

$$\tilde{G}(\lambda) = \frac{\lambda^3}{2\lambda^2 - 3\lambda + 1},$$

$$n(\lambda) = \lambda^3,$$

$$m(\lambda) = 2\lambda^2 - 3\lambda + 1,$$

$$x(\lambda) = -14\lambda + 15,$$

$$y(\lambda) = 7\lambda^2 + 3\lambda + 1,$$

$$N(s) = \frac{1}{(s+1)^3},$$

$$M(s) = \frac{s(s-1)}{(s+1)^2},$$

$$X(s) = \frac{15s + 1}{(s+1)},$$

$$Y(s) = \frac{s^2 + 5s + 11}{(s+1)^2}.$$

PENYELESAIAN FAKTORISASI KOPRIMA DENGAN METODE RUANG KEADAAN

Misalkan **A**, **B**, **C**, **D** adalah matriks dengan elemen bilangan real masing-masing berdimensi *n* x *n*, *n* x *l*, *l* x *n*, *l* x *l*.
Fungsi alih dengan empat matriks tersebut adalah

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{D} + \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}. \qquad (5.1)$$

Konstanta *D* sama dengan nilai fungsi alih pada *s* = ∞, jika fungsi alih *strictly proper* maka *D* = 0. Untuk lebih memudahkan, persamaan (3.4) dapat ditulis seperti berikut.

$$\mathbf{G}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}\right] \qquad (5.2)$$

Selanjutnya, dengan realisasi dari *G*(s) maka dapat dicari realisasi ruang keadaan untuk empat fungsi *N*, *M*, *X*, *Y* dalam φ sedemikian hingga $G = \frac{N}{M}, NX + MY = I$, dengan N dan M adalah faktorisasi koprima.

Prosedur untuk menghitung Faktorisasi Koprima

Langkah 1. Dapatkan realisasi (**A**, **B**, **C**, **D**) dari fungsih alih.
Jika masukan dan keluaran *G* dinotasikan sebagai *u* dan *y* maka persamaan keadaan dari *G* adalah

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u, \qquad (5.3)$$

$$y = \mathbf{C}x + \mathbf{D}u. \qquad (5.4)$$

Langkah 2. Hitung matriks **F** dan **H** sedemikian hingga **A** + **BF** dan **A** + **HC** stabil.
Pilih matriks real **F** berukuran 1 x *n* sedemikian hingga **A** + **BF** adalah stabil yakni semua bagian real dari nilai eigen (Re λ (**A** + **BF**) < 0)).
Definisikan sinyal $v := u - \mathbf{F}x$. Kemudian dari persamaan (5.3) dan (5.4) didapat

$$\dot{x} = (\mathbf{A} + \mathbf{BF})x + \mathbf{B}v,$$

$$u = \mathbf{F}x + v,$$

$$y = (\mathbf{C} + \mathbf{DF})x + \mathbf{D}v.$$

Dari persamaan-persamaan diatas, fungsi alih dari *v* ke *u* adalah

$$M(s) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} + \mathbf{BF} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{F} & 1 \end{array}\right] \qquad (5.5)$$

dan dari *v* ke *y*

$$N(s) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} + \mathbf{BF} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} + \mathbf{DF} & \mathbf{D} \end{array}\right]. \qquad (5.6)$$

Oleh karena itu,

$$u = Mv, \quad y = Nv.$$

sehingga $y = NM^{-1}, G = \frac{N}{M}$. Jelas bahwa *N* dan *M* proper dan stabil karena **A** + **BF** stabil. Demikian juga $N, M \in$ φ.
Untuk mendapatkan *X*(*s*) dan dan *Y*(*s*), pilih matriks real **H**, *n* x 1 sedemikian hingga **A** + **HC** stabil, sehingga dapat diperoleh

$$X(s) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} + \mathbf{HC} & \mathbf{H} \\ \hline \mathbf{F} & 0 \end{array}\right] \qquad (5.7)$$

$$Y(s) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} + \mathbf{HC} & -\mathbf{B} - \mathbf{HD} \\ \hline \mathbf{F} & \mathbf{I} \end{array}\right] \qquad (5.8)$$

Langkah 3. Gunakan formula (3.) sampai (3.) untuk menghitung *N, M, X, Y*.

PARAMETERISASI PENGENDALI YANG MENSTABILKAN SISTEM

Fungsi alih *plant* tidak selamanya diasumsikan stabil. Misalkan $P = \frac{N}{M}$ adalah faktorisasi koprima dalam φ dan misalkan *X* dan *Y* adalah dua fungsi dalam φ yang memenuhi persamaan

$$NX + MY = I.$$

Teorema 2 [1].
Himpunan semua pengendali untuk setiap sistem berumpan balik adalah stabil internal sama dengan

$$\left\{ \frac{X + MQ}{Y - NQ} : Q \in \varphi \right\}. \qquad (6.1)$$

Teorema 2 ini menghasilkan Teorema 1 ketika *P* ∈ φ.
Bukti :
Ambil

$$N = P, M = I, X = 0, Y = I.$$

ketika *P* ∈ φ. Kemudian

$$\frac{X + MQ}{Y - NQ} = \frac{Q}{I - PQ}$$

Untuk membuktikan Teorema 2 diperlukan lemma berikut.
Lemma 1 [1].

Misalkan $C = \dfrac{N_C}{M_C}$ adalah faktorisasi koprima dalam φ maka sistem berumpan balik stabil jika dan hanya jika

$$(NN_C + MM_C)^{-1} \in \varphi.$$

Bukti Teorema 2 (⊃). Andaikan $Q \in \varphi$ dan

$$C := \frac{X + MQ}{Y - NQ}, \tag{6.2}$$

untuk menunjukkan sistem berumpan balik stabil, definisikan

$$N_C := X + MQ, \tag{6.3}$$

$$M_C := Y - NQ, \tag{6.4}$$

kemudian dari persamaan

$$NX + MY = I, \tag{6.5}$$

dihasilkan

$$NN_C + MM_C = I. \tag{6.6}$$

Oleh karena $C = \dfrac{N_C}{M_C}$ adalah faktorisasi koprima dan dari Lemma 1 sistem berumpan balik adalah stabil internal.

(⊂) Sebaliknya, misalkan C adalah sebuah pengendali yang memenuhi kestabilan internal maka harus ditemukan Q dalam φ sedemikian hingga

$$C = \frac{X + MQ}{Y - NQ}$$

Misalkan $C = \dfrac{N_C}{M_C}$ adalah faktorisasi koprima dalam φ dan definisikan

$$V := \left(NN_C + MM_C\right)^{-1}, \tag{6.7}$$

sehingga

$$NN_C V + MM_C V = I. \tag{6.8}$$

Dengan Lemma 1, $V \in \varphi$.

Misalkan Q menjadi solusi dari

$$M_C V = Y - NQ. \tag{6.9}$$

Substitusikan (6.9) ke dalam (6.8) sehingga didapat

$$NN_C V + M(Y - NQ) = I.$$

Tambahkan dan kurangi NMQ dalam (6.9) untuk menghasilkan

$$N(X + MQ) + M(Y - NQ) = I. \tag{6.10}$$

Bandingkan persamaan (6.10) dan (6.8), terlihat bahwa

$$N_C V = X + MQ. \tag{6.11}$$

Dari persamaan (6.9) dan (6.11) menghasilkan

$$C = \frac{N_C V}{M_C V} = \frac{X + MQ}{Y - NQ}. \tag{6.12}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $Q \in \varphi$. Kalikan (3.14) dengan X dan (3.17) dengan Y, kemudian kurangi dan pindah sisi

$$(NX + MY)Q = YN_C V - XM_C V. \tag{6.13}$$

Dengan memasukkan persamaan (6.5) didapat

$$Q = YN_C V - XM_C V.$$

Oleh karena $YN_C V - XM_C V \in \varphi$ maka $Q \in \varphi$. Jadi Teorema 2 terbukti.

HASIL NUMERIK

Sebuah sistem didefinisikan sebagai berikut

$$\ddot{y} - 1 = u.$$

Fungsih alih dari sistem adalah

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s-1)},$$

dan persamaan ruang keadaannya adalah

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u$$
$$y = \mathbf{C}x + \mathbf{D}u$$

dengan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

Untuk menentukan pengendali yang membuat sistem ini stabil internal maka harus dihitung matriks **F** dan **H** sedemikian hingga **A** + **BF** dan **A** + **HC** stabil. Dari hasil perhitungan dengan bantuan software Maple 8 didapat

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$M = \left[\frac{2s(s-1)}{2s^2 + s + 2} \right]$$

$$\mathbf{N} = \left[\frac{2}{(s+1)(2s^2+s+2)} \right]$$

$$\mathbf{X} = \left[\frac{14s+1}{s^2+s+1)} \right]$$

$$\mathbf{Y} = \left[\frac{2s^3+7s^2+15s+23}{2(s^3+2s^2+2s+1)} \right]$$

Sehingga diperoleh pengendali yang memenuhi kestabilan internal yakni

$$\mathbf{C}(s) = \left[\frac{2(14s+1)(s+1)}{2s^3+7s^2+15s+23} \right].$$

Berdasarkan Theorema 2, pengendali $C(s)$ untuk sistem berumpan balik adalah stabil internal sama dengan

$$\left\{ \frac{X+MQ}{Y-NQ} : Q \in \varphi \right\}.$$

Hal ini dapat dibuktikan bahwa pengendali **C** memenuhi persamaan **NX + MY = I**, dan sebaliknya, misalkan **C** adalah sebuah pengendali yang memenuhi kestabilan internal maka harus ditemukan **Q** dalam φ sedemikian hingga

$$\mathbf{C} = (\mathbf{Y} - \mathbf{NQ})^{-1}.(\mathbf{X} + \mathbf{MQ}).$$

Dari perhitungan didapat Q dalam φ yaitu

$$\mathbf{Q} = 0$$

dan memenuhi

$$\mathbf{C} = (\mathbf{Y} - \mathbf{NQ})^{-1}.(\mathbf{X} + \mathbf{MQ}).$$

Sehingga dapat ditunjukkan bahwa **C** membuat sistem menjadi stabil.

PENUTUP

Penentuan pengotrol sistem berumpan balik dari sistem linear yang tak berubah terhadap waktu, kontinu yang membuat sistem stabil internal dapat dilakukan dengan menggunakan faktorisasi koprima yang dihitung dengan algoritma euclid dan metode ruang keadaan.

Dengan metode ruang keadaan, dapat diperoleh realisasi ruang keadaan dari sistem, paramaterisasi semua pengendali yang menstabilkan sistem dan pengendali yang membuat sistem stabil internal. Syarat cukup agar sistem stabil internal adalah dapat ditemukan umpan balik sedemikian sehingga sistem lup tertutupnya stabil.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Doyle, J. C., B. A. Francis, dan A. R. Tannenbaum., *Feedback Control Theory*, Macmillan Publishing Company, New York, 1992.

[2] Ogata, K, *Teknik Kontrol Automatik (Sistem Pengaturan)*, Erlangga, Jakarta, 1990.

[3] Bultheel, A. And Barel, M.V., *Some Applications of the Euclidean Algorithm*, K.U. Lenven Dept. Computing Science, Celestijuenlaan 200A, B-3001 Leuven(belgium), 1993.

[4] Venkatesulu, M. and Kartheeban, K., *EAB-Euclidian Algorithm Based Key Computation Protocol for Secure Group Communication in Dynamic Grid Environment*, International Journal of Grid and Distributed Computing Vol. 3, No. 4, December 2010.

[5] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, 1996.

[6] Mackenroth, U., *Robust Control Systems Theory and Case Studies*, Springer-Verlag Berlin Hedelberg, 2004.

[7] Ball, J.A., Helton, J.W., and Verma, M., *A factorization principle for stabilization of linear control systems*, International Journal of Robust and Nonlinear Control, Vol. 1, Issue 4, 1991.