Jurnal Sains dan Matematika Vol. 20 (3): 58-63 (2012)

Functionally Small Riemann Sums Fungsi Terintegral Henstock-Dunford pada [*a*,*b*]

Solikhin[1], Sumanto[2], Siti Khabibah[3]
[1,2,3]Program Studi Matematika, FSM UNDIP
Jl. Prof. Soedarto, S.H. Semarang, 50275

E-mail: soli_erf@yahoo.com, khabibah_ku@yahoo.co.id

ABSTRACT

In this paper we study Henstock-Dunford integral on $[a,b]$. We discuss some properties of the integrable. We shall define functionally small Riemann sums (FSRS) and show that it is necessary and sufficient condition for function to be Henstock-Dunford integral on $[a,b]$.

Keywords: Henstock-Dunford integral, Functionally small Riemann sums

PENDAHULUAN

Integral Henstock merupakan generalisasi dari integral Riemann, yang didefinisikan berdasarkan partisi Perron δ-fine. Integral ini memuat integral Riemann dan integral Lebesque (ekuivalen integral McShane) [2], [7]. Integral Henstock telah mengalami perkembangan baik dari segi teori maupun aplikasinya [1], [4], [6]. Dari kajian tentang integral Henstock banyak sifat-sifat yang telah diungkap baik dalam ruang real R [2], [7] maupun ruang Euclide R^n [5].

Berbeda dengan integral Dunford. Dunford mendefinisikan integralnya pada fungsi terukur lemah pada ruang real R.[9]. Diberikan X ruang Banach dan X^* ruang dualnya. Fungsi terukur lemah $f:[a,b]\to X$ dikatakan terintegral Dunford pada $[a,b]$ jika untuk setiap $x^*\in X^*$ fungsi bernilai real $x^*f:[a,b]\to R$ terintegral Lebesgue pada $[a,b]$ dan untuk setiap $A\subset[a,b]$ himpunan terukur terdapat vektor $x^{**}_{(f,A)}\in X^{**}$ sehingga

$$x^{**}_{(f,A)}\left(x^*\right)=\left(H\right)\int_A x^*f=\left(H\right)\int_a^b x^*f\chi_A .$$

Integral Dunford kemudian diperluas ke dalam integral tipe Riemann, yaitu untuk setiap $x^*\in X^*$ fungsi bernilai real $x^*f:[a,b]\to R$ terintegral Henstock. Integral ini dinamakan integral Henstock-Dunford [3]. Integral jenis ini juga telah digeneralisasi ke dalam ruang Euclide R^n [8].

Berdasarkan hasil kajian integral Henstock-Dunford mengenai sifat-sifat sederhana dan fungsi primitifnya [3], penulis akan mengkaji sifat-sifat lebih lanjut dari integral Henstock-Dunford pada ruang R. Sifat-sifat ini digeneralisasi dari integral Henstock pada ruang real R, yaitu sifat Functionally small Riemann sums fungsi terintegral Henstock. Diperoleh bahwa syarat perlu dan cukup suatu fungsi terintegral Henstock adalah memenuhi sifat functionally small Riemann sumsnya [7].

Integral Henstock-Dunford pada [*a*,*b*]

Pada tulisan ini, dibahas definisi integral Henstock-Dunford pada $[a,b]$, sifat-sifat sederhana, dan fungsi primitifnya mengacu pada [3].

Definisi 1. [3] *Diberikan X ruang Banach dan X^* ruang dualnya, serta interval tertutup $[a,b]\subset R$. Fungsi $f:[a,b]\to X$ dikatakan terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$ jika untuk setiap $x^*\in X^*$ fungsi $x^*f:[a,b]\to R$ terintegral Henstock pada $[a,b]$ dan untuk setiap interval tertutup $A\subset[a,b]$ terdapat vektor $x^{**}_{(f,A)}\in X^{**}$ sehingga*

$$x^{**}_{(f,A)}(x^*)=(H)\int_A x^*f .$$

Selanjutnya vektor $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ *di atas disebut nilai integral Henstock-Dunford pada* A *dan ditulis*

$$x^{**}_{(f,A)} = (HD)\int_A f .$$

Jika f terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$, ditulis $f \in HD[a,b]$.

Teorema 2. [3] *Jika* $f \in HD[a,b]$ *maka vektor* $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ *pada Definisi 1. adalah tunggal.*

Bukti:
Diberikan sebarang interval tertutup $A \subset [a,b]$. Andaikan terdapat vektor $x^{**}_{1(f,A)} \in X^{**}$ dan $x^{**}_{2(f,A)} \in X^{**}$ maka

$$x^{**}_{1(f,A)}(x^*) = (H)\int_A x^* f \text{ dan}$$

$$x^{**}_{2(f,A)}(x^*) = (H)\int_A x^* f .$$

Oleh karena itu

$$x^{**}_{1(f,A)}(x^*) - x^{**}_{2(f,A)}(x^*) = (H)\int_A x^* f - (H)\int_A x^* f$$
$$= 0, \quad \forall x^* \in X^* .$$

Jadi $x^{**}_{1(f,A)} = x^{**}_{2(f,A)}$. ■

Teorema 3. [3] *Jika* $f \in HD[a,b]$ *maka* $f \in HD(A)$ *untuk setiap interval tertutup bagian* $A \subset [a,b]$.

Bukti :
Jelas menurut definisi. ■

Teroema 4. [7] (Kriteria Cauchy) *Fungsi* $f \in HD[a,b]$ *jika dan hanya jika untuk setiap bilangan* $\varepsilon > 0$ *terdapat fungsi positif* δ *pada* $[a,b]$ *sehingga jika* $A \subset [a,b]$ *interval tertutup dan* $\mathcal{D} = \{(D,x)\}$ *dan* $\mathcal{P} = \{(P,y)\}$ *masing-masing partisi Perron* δ*-fine pada* A *berlaku*

$$\left|\mathcal{D}\sum x^* f(x)\alpha(D) - \mathcal{P}\sum x^* f(y)\alpha(P)\right| < \varepsilon$$

untuk setiap $x^* \in X^*$.

Bukti:
(Syarat Perlu) Diketahui $f \in HD[a,b]$. Jadi untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^* f$ terintegral Henstock pada $[a,b]$ dan untuk setiap interval tertutup $A \subset [a,b]$ terdapat vektor $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ sehingga

$$x^{**}_{(f,A)}(x^*) = (H)\int_A x^* f .$$

Diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang dan $x^* \in X^*$ maka terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ sehingga untuk interval tertutup $A \subset [a,b]$ dan $\mathcal{D} = \{(D,x)\}$ dan $\mathcal{P} = \{(P,y)\}$ masing-masing partisi Perron δ-fine pada A berlaku

$$\left|x^{**}_{(f,A)}(x^*) - \mathcal{D}\sum x^* f(x)\alpha(D)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dan

$$\left|x^{**}_{(f,A)}(x^*) - \mathcal{P}\sum x^* f(y)\alpha(P)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dengan demikian diperoleh

$$\left|\mathcal{D}\sum x^* f(x)\alpha(D) - \mathcal{P}\sum x^* f(y)\alpha(P)\right|$$
$$\le \left|\mathcal{D}\sum x^* f(x)\alpha(D) - x^{**}_{(f,A)}(x^*)\right| + \left|x^{**}_{(f,A)}(x^*) - \mathcal{P}\sum x^* f(y)\alpha(P)\right|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

(Syarat cukup) Diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang dan $x^* \in X^*$ maka terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ sehingga untuk interval tertutup $A \subset [a,b]$ dan $\mathcal{D} = \{(D,x)\}$ dan $\mathcal{P} = \{(P,y)\}$ masing-masing partisi Perron δ-fine pada A berlaku

$$\left|\mathcal{D}\sum x^* f(x)\alpha(D) - \mathcal{P}\sum x^* f(y)\alpha(P)\right| < \varepsilon .$$

Diambil $\varepsilon = 1$ terdapat fungsi positif δ_1 pada $[a,b]$ dengan sifat di atas.

Diambil $\varepsilon = \frac{1}{2}$ terdapat fungsi positif δ_2 pada $[a,b]$ dengan $\delta_2 \le \delta_1$ dan memenuhi sifat di atas.

Diambil $\varepsilon = \frac{1}{n}$ terdapat fungsi positif δ_n pada $[a,b]$ dengan $\delta_n \le \delta_{n-1} \le \ldots \le \delta_2 \le \delta_1$ dan memenuhi sifat di atas.

Untuk $\forall\, n \in N$ dan $x^* \in X^*$ didefinisikan

$$S_n = \mathcal{D}_n \sum x^* f(x)\alpha(D),$$

dengan jumlahan diambil atas partisi Perron δ_n – fine $\mathcal{D}_n = \{(D,x)\}$ pada A.

Diambil sebarang $m,n \in N$ dengan $m \ge n$, maka untuk setiap partisi Perron δ_m – fine pada A merupakan partisi Perron δ_n – fine pada A.

Akibatnya untuk setiap partisi Perron δ_m – fine $\mathcal{D}_m = \{(D,x)\}$ pada A dan sebarang partisi Perron δ_n – fine $\mathcal{D}_n = \{(D,x)\}$ pada A berlaku

$$|S_m - S_n| =$$
$$\left|\mathcal{D}_m \sum x^* f(x)\alpha(D) - \mathcal{D}_n \sum x^* f(x)\alpha(D)\right| < \frac{1}{n}.$$

Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ maka terdapat bilangan asli n_0 sehingga $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Selanjutnya jika $m,n \ge n_0$ maka diperoleh

$$|S_m - S_n| < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Hal ini berarti $\{S_n\}$ barisan Cauchy di R. Karena R lengkap berarti untuk setiap $x^* \in X^*$ dan $A \subset [a,b]$ di atas terdapat bilangan $x^{**}_{(f,A)}(x^*) = S \in R$ sehingga $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.

Dengan demikian untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ di atas terdapat bilangan asli n_0^* dan jika $n \ge n_0^*$ berlaku

$$|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Diambil

$$\delta(x) = \min\left\{\delta_{n_0}(x), \delta_{n_0^*}(x) : x \in [a,b]\right\}$$

Diperoleh δ fungsi positif pada $[a,b]$.

Selanjutnya untuk setiap $\mathcal{P} = \{(P,x)\}$ partisi Perron δ –fine pada A berlaku

$$\begin{aligned}&\left|\mathcal{P}\sum x^* f(x)\alpha(P) - S\right| \\ &\le \left|\mathcal{P}\sum x^* f(x)\alpha(P) - S_{n_0^*}\right| + \left|S_{n_0^*} - S\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Hal ini berarti untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^* f$ terintegral Henstock pada $[a,b]$ dan terdapat vektor $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ sehingga

$$x^{**}_{(f,A)}(x^*) = S = (H)\int_A x^* f.$$

Dengan kata lain, $f \in HD[a,b]$. ■

Definisi 5. [3] *Diberikan* $f \in HD[a,b]$. *dan* $\mathcal{J}(E)$ *koleksi semua interval tertutup di dalam* $[a,b]$. *Fungsi* $F : \mathcal{J}(E) \to X$ *dengan rumus*

$$F(A) = x^{**}_{(f,A)} = (HD)\int_A f$$

dan $F(\varnothing) = 0$, *untuk setiap* $A \in \mathcal{J}(E)$ *disebut fungsi primitif-HD fungsi* f.

Berdasarkan Definisi 5. maka fungsi F merupakan fungsi aditif.

Akibat 6. *Jika* $f \in HD[a,b]$ *dengan* F *sebagai primitif-HDnya dan* $E_1, E_2, ..., E_p$ *interval-interval terttutup di dalam* $[a,b]$ *yang tidak saling tumpang-tindih dan* $[a,b] = \bigcup_{i=1}^{p} E_i$ *maka*

$$F([a,b]) = \sum_{i=1}^{p} F(E_i) = \sum_{i=1}^{p} x^{**}_{(f,E_i)}.$$

Bukti :

Karena $f \in HD(E,\alpha)$ dengan F sebagai primitif-HDnya, $E = \bigcup_{i=1}^{p} E_i$ dengan $E_i^0 \cap E_j^0 = \varnothing$ untuk setiap $i \ne j$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}F(E) &= F\left(\bigcup_{i=1}^{p} E_i\right) \\ &= x^{**}_{\left(f, \bigcup_{i=1}^{p} E_i, \alpha\right)} \\ &= x^{**}_{(f,E_1,\alpha)} + x^{**}_{(f,E_2,\alpha)} + ... + x^{**}_{(f,E_p,\alpha)} \\ &= F(E_1) + F(E_2) + ... + F(E_p) \\ &= \sum_{i=1}^{p} F(E_i) \\ &= \sum_{i=1}^{p} x^{**}_{(f,E_i,\alpha)}. \ ■\end{aligned}$$

Selanjutnya berdasarkan Definisi 1. maka integral Henstock-Dunford pada $[a,b]$ dapat dinyatakan seperti dalam teorema berikut.

Teorema 7. [7] *Fungsi* $f \in HD[a,b]$ *jika dan hanya jika terdapat fungsi aditif* F *pada* $[a,b]$ *sehingga untuk setiap bilangan* $\varepsilon > 0$ *dan* $x^* \in X^*$ *terdapat fungsi positif* δ *pada* $[a,b]$ *dan jika* $A \subset [a,b]$ *interval tertutup dan* $\mathcal{D} = \{(D,x)\}$ *partisi Perron* δ*-fine pada* A *berlaku*

$$\left|\mathcal{D}\sum x^*\left(f(x)\alpha(D) - F(D)\right)\right| < \varepsilon \text{ atau}$$

$$\left|\mathcal{D}\sum x^* f(x)\alpha(D) - x^* F(D)\right| < \varepsilon. \blacksquare$$

Teorema 8. [7] (Lemma Henstock) *Fungsi* $f \in HD[a,b]$ *dengan fungsi primitif* F, yaitu *untuk setiap bilangan* $\varepsilon > 0$ *dan* $x^* \in X^*$ *terdapat fungsi positif* δ *pada* $[a,b]$ *sehingga jika* $A \subset E$ *interval tertutup dan* $\mathcal{D} = \{(D,x)\}$ *partisi Perron* δ*-fine pada* A *berlaku*

$$\left|\mathcal{D}\sum x^*\left(f(x)\alpha(D) - F(D)\right)\right| < \varepsilon$$

maka untuk setiap jumlahan bagian $\sum_1$ dari $\mathcal{D}\sum$ berlaku

$$\left|\mathcal{D}\sum_1 x^* f(x)\alpha(D) - x^* F(D)\right| < \varepsilon. \blacksquare$$

Functionally Small Riemann Sums

Berikut ini akan ditunjukkan bahwa syarat perlu dan cukup suatu fungsi terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$, yaitu memenuhi sifat functionally small Riemann sums pada $[a,b]$.

Pembahasan Functionally Small Riemann Sums (FSRS) pada integral Henstock-Dunford ini dikaitkan dengan fungsi non negatif yang terintegral Lebesgue pada $[a,b]$.

Teorema 9. *Jika fungsi* f *terintegral Henstock-Dunford pada* $[a,b]$ *maka ada barisan himpunan tertutup* $\{E_i\}$, $E_i \subseteq E_{i+1}$, $[a,b] = \bigcup E_i$ *dan* $x^* f$ *terintegral Lebesgue pada* E_i *untuk setiap* i.

Bukti :

Karena $f \in HD[a,b]$ maka ada fungsi primitif F pada $[a,b]$. Dapat ditunjukkan bahwa F kontinu pada $[a,b]$, lebih lanjut $F \in ACG^*$. Dengan demikian terdapat barisan tertutup $\{E_i\}$ dengan $[a,b] = \bigcup E_i$ dan $F \in AC^*(E_i)$ untuk setiap i.

Akibatnya $F \in AC(E_i)$ untuk setiap i.

Jadi $f \in BV(E_i)$ untuk setiap i.

Dengan demikian, $F'(x) = f(x)$ hampir dimana-mana pada E_i untuk setiap i.

Jadi $x^* f$ terintegral Lebesgue pada E_i untuk setiap i. $\blacksquare$

Definisi 10. *Diberikan* $f:[a,b] \to X$ *fungsi terukur pada* $[a,b]$. *Fungsi* f *dikatakan mempunyai sifat functionally small Riemann sums pada* $[a,b]$, *ditulis* $f \in FSRS[a,b]$, *jika untuk setiap bilangan* $\varepsilon > 0$, $x^* \in X^*$, *dan interval tertutup* $A \subset [a,b]$ *terdapat fungsi non negatif* $x^* g$ *yang terintegral Lebesgue pada* $[a,b]$ *dan fungsi positif* δ *pada* $[a,b]$ *sehingga jika* $\mathcal{D} = \{(D,x)\}$ *partisi Perron* δ*-fine pada* A *berlaku*

$$\left|\mathcal{D}\sum_{|x^* f(x)| > x^* g(x)} x^* f(x)\alpha(D)\right| < \varepsilon.$$

Teorema 11. *Jika fungsi* $f \in FSRS[a,b]$ *maka* $f \in HD[a,b]$.

Bukti:

Diketahui $f \in FSRS[a,b]$ berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, $x^* \in X^*$, dan interval tertutup $A \subset [a,b]$ terdapat fungsi non negatif $x^* g$ yang terintegral Lebesgue pada $[a,b]$ dan fungsi positif δ pada $[a,b]$ sehingga jika $\mathcal{D} = \{(D,x)\}$ partisi Perron δ-fine pada A berlaku

$$\left|\mathcal{D}\sum_{|x^* f(x)| > x^* g(x)} x^* f(x)\alpha(D)\right| < \varepsilon.$$

Didefinisikan

$$x^* h(x) = \begin{cases} x^* f(x),\ x \in [a,b], & |x^* f(x)| \le |x^* g(x)| \\ 0 & ,\ x \text{ yang lain} \end{cases}$$

Diperoleh bahwa fungsi x^*h terukur dan terdominasi oleh x^*g pada $[a,b]$. Karena x^*g terintegral Lebesgue pada $[a,b]$, maka fungsi h terintegral Henstock-Dunford mutlak sehingga terdapat fungsi positif δ_* pada $[a,b]$ dengan sifat untuk setiap $\mathcal{D}_1$ dan $\mathcal{D}_2$ dua partisi Perron δ_*-fine pada A berlaku

$$\left|\mathcal{D}_1\sum x^*h(x)\alpha(D)-\mathcal{D}_2\sum x^*h(x)\alpha(D)\right|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Diambil $\delta^*(x)=\min\{\delta(x),\delta_*(x)\}$.
Akibatnya, untuk sebarang $\mathcal{P}$ dan $\mathcal{Q}$ partisi Perron δ^*-fine pada A berlaku

$$\begin{aligned}
&\left|\mathcal{P}\sum x^*f(x)\alpha(D)-\mathcal{Q}\sum x^*f(x)\alpha(D)\right|\\
&\le\left|\mathcal{P}\sum_{|x^*f(x)|>x^*g(x)} x^*f(x)\alpha(D)\right|\\
&+\left|\mathcal{Q}\sum_{|x^*f(x)|>x^*g(x)} x^*f(x)\alpha(D)\right|\\
&+\left|\mathcal{P}\sum_{|x^*f(x)|\le x^*g(x)} x^*f(x)\alpha(D)\right.\\
&\left.-\mathcal{Q}\sum_{|x^*f(x)|\le x^*g(x)} x^*f(x)\alpha(D)\right|\\
&<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}\\
&+\left|\mathcal{P}\sum x^*h(x)\alpha(D)-\mathcal{Q}\sum x^*h(x)\alpha(D)\right|\\
&<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}<\varepsilon.
\end{aligned}$$

Menurut kriteria Cauchy, $f\in HD[a,b]$.

Teorema 12. *Jika* $f\in HD[a,b]$ *maka* $f\in FSRS[a,b]$.

Bukti:

Diketahui $f\in HD[a,b]$ maka untuk setiap $x^*\in X^*$, x^*f terukur pada $[a,b]$. Menurut Teorema 9 terdapat barisan himpunan tertutup $\{E_i\}$ dengan $E_i\subseteq E_{i+1}$, $[a,b]=\bigcup E_i$ dan x^*f terintegral Lebesgue pada E_i untuk setiap i.

Didefinisikan

$$x^*f_k(x)=\begin{cases}x^*f(x), x\in E_k\\ 0 \qquad , x \text{ yang lain}\end{cases}.$$

Untuk setiap k diperoleh $f_k\in HD[a,b]$.
Hal ini berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon>0$, $x^*\in X^*$, dan interval tertutup $A\subset[a,b]$ ada bilangan asli n_0 sehingga jika $n\ge n_0$ berlaku

$$\left|(H)\int_A x^*f-(H)\int_{E_k} x^*f\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Untuk setiap $k\in N$ terdapat fungsi positif δ_k pada $[a,b]$ sehingga untuk setiap $\mathcal{D}$ partisi Perron δ_k-fine pada A berlaku

$$\left|\mathcal{D}\sum x^*f_k(x)\alpha(D)-(H)\int_A x^*f_k\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

untuk setiap $x^*\in X^*$, dan interval tertutup $A\subset[a,b]$.

Karena fungsi $f\in HD[a,b]$ maka terdapat fungsi positif δ_* pada $[a,b]$ sehingga jika $\mathcal{D}$ partisi Perron δ_*-fine pada A berlaku

$$\left|\mathcal{D}\sum x^*f(x)\alpha(D)-(H)\int_{[a,b]} x^*f\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

untuk setiap $x^*\in X^*$, dan interval tertutup $A\subset[a,b]$.

Diketahui fungsi x^*g dengan $x^*g(x)=|x^*f_k(x)|$.

Diperoleh x^*g non negatif dan terukur pada $[a,b]$, sehingga x^*g terintegral Lebesgue pada $[a,b]$.

Kemudian diambil

$$\delta(x)=\min\{\delta_k(x),\delta_*(x)\}.$$

Diperoleh δ fungsi positif pada $[a,b]$.

Dengan demikian, untuk sebarang $\mathcal{D}$ partisi Perron δ-fine pada A berlaku

$$\begin{aligned}
&\left|\mathcal{D}\sum_{|x^*f(x)|>x^*g(x)} x^*f(x)\alpha(D)\right|=\\
&\left|\mathcal{D}\sum x^*f(x)\alpha(D)-\mathcal{D}\sum_{|x^*f(x)|\le x^*g(x)} x^*f(x)\alpha(D)\right|\\
&\le\left|\mathcal{D}\sum x^*f(x)\alpha(D)-(H)\int_A x^*f\right|\\
&+\left|\mathcal{D}\sum x^*f(x)\alpha(D)-(H)\int_A x^*f_k\right|
\end{aligned}$$

$$+\left|(H)\int_A x^* f_k - \mathfrak{D}\sum_{x\in E_k} x^* f(x)\alpha(D)\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \left|(H)\int_A x^* g - \mathfrak{D}\sum x^* g(x)\alpha(D)\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon .$$

Jadi $f \in FSRS[a,b]$. ■

Akibat 13. *Fungsi* $f \in FSRS[a,b]$ *jika dan hanya jika* $f \in HD[a,b]$.

Bukti:

Menurut Teorema 11 dan Teorema 12. ■

PENUTUP

Berdasarkan pembahasan di atas diperoleh kesimpulan bahwa syarat perlu dan cukup suatu fungsi terukur terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$ adalah fungsi tersebut bersifat functionally small Riemann sums pada $[a,b]$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Boccuto, A., Skvortsov, A.V. 2004, *Henstock-Kurzweil Type Integration of Riesz-Space-Valued Functions and Applications to Walsh Series*, Real Analysis Echange, 29(1): 419-439.

[2] Gordon, R.A. 1994, *The Integral of lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, Mathematical Society, USA.

[3] Guoju, Ye., Tianqing, An. 2001, *On Henstock-Dunford and Henstock-Pettis Integrals*, IJMMS, 25(7): 467-478.

[4] Heikkila, S. 2011, *Monotone Convergence Theorems for Henstock-Kurzweil Integrable Functions and Applications*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 377(1): 286-295.

[5] Indrati, Ch. R. 2002, *Integral Henstock-Kurzweil di dalam Ruang Euclide Berdimensi-n, Disertasi*, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

[6] Indrati, Ch.R., Surodjo, Budi. 2000, *Aplikasi Integral Henstock-Kurzweil pada Medan Vektor*, Lembaga Penelitian UGM, Yogyakarta.

[7] Lee P.Y. 1989, *Lanzhou Lectures on Henstock Integration*, World Scientific, Singapore.

[8] Saifullah. 2003, *Integral Henstock-Dunford pada Ruang Euclide* $\mathbb{R}^n$, Tesis, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

[9] Schwabik, S., Guoju, Ye. 2004, *Topics in Banach Space Integration*, Manuscrip in Preparation.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Fakultas Sains dan Matematika Universitas Diponegoro yang telah memberikan dana untuk penelitian ini.