

Solusi Numerik Persamaan Difusi dengan Menggunakan Metode Beda Hingga

Ririn Sulpiani dan Widowati

Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro

Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang

ABSTRAK

The developmental process characteristic of the distribution of pressure, enthalpy and temperature on geothermal reservoir can be represented in mathematical models. The basic equation used in the modeling process is the Darcy law and mass equilibrium equations with the physical parameters of the distribution of pressure. Pressure distribution model obtained is a two-dimensional diffusion equation in the form of two-order partial differential equations. Furthermore, the finite difference centered method used to find the numerical solution of the diffusion equation.

Keywords: Geothermal Reservoir, pressure, Darcy law, finite difference method

PENDAHULUAN

Energi panas bumi merupakan energi panas dari dalam bumi yang dibangkitkan oleh proses magmatisasi lempeng-lempeng tektonik. Besarnya potensi cadangan suatu lapangan panas bumi dapat digambarkan dengan beberapa parameter reservoir seperti temperatur, tekanan, dan entalpi yang merepresentasikan energi termal yang terkandung di dalam fluida reservoir tersebut. Karena itu pengetahuan mengenai distribusi temperatur, tekanan, dan entalpi dari sistem reservoir merupakan hal yang sangat penting [10].

Sistem panasbumi merupakan energi yang tersimpan dalam bentuk air panas atau uap panas pada kondisi geologi tertentu pada kedalaman beberapa kilometer di dalam kerak bumi. Sistem panasbumi meliputi panas dan fluida yang memindahkan panas mengarah ke permukaan. Adanya konsentrasi energi panas pada sistem panasbumi umumnya dicirikan oleh adanya anomali panas yang dapat terekam di permukaan, yang ditandai dengan gradien temperatur yang tinggi [2].

Sistem panas bumi di Indonesia umumnya merupakan sistem hidrothermal yang mempunyai temperatur tinggi ($>225^{\circ}\text{C}$), hanya beberapa diantaranya yang mempunyai temperature sedang ($150-225^{\circ}\text{C}$). Sistem panasbumi mencakup sistem *hydrothermal* merupakan sistem tata-air, proses

pemanasan dan kondisi sistem dimana air yang terpanasi terkumpul [2].

Fluida aliran panas bumi berasal dari air permukaan (meteorik air) ke dalam batu dibawah permukaan melalui celah-celah atau permeabel batu. Dalam reservoir, air dari permukaan akan kontak dengan batu panas. Karena air panas lebih ringan dari air dingin, maka air panas akan cenderung bergerak ke atas melalui celah atau batuan permeabel, dan kemudian akan muncul di permukaan sebagai sumber air panas, geyser, dan lain-lain [6].

Energi panas bumi dikenal sebagai energi terbarukan dan bersih. Langkah pertama untuk memprediksi potensi energi panas bumi dapat diperkirakan dengan pemodelan, antara lain fisik dan simulasi numerik. Pemodelan matematika dan numerik dilakukan untuk mensimulasikan geothermal reservoir [6].

Dalam pemodelan reservoir panas bumi ada banyak variabel dan formulasi untuk dihitung. Formulasi dan variabel ini dihitung dengan menggunakan pendekatan matematika berdasarkan pemodelan fisik. Digunakan beberapa formulasi dan variabel yang berhubungan dengan aliran fluida dalam media berpori. Beberapa formulasi dan variabel yang terkait bagaimana aliran fluida dalam media berpori digunakan adalah hukum Darcy, kesetimbangan massa, kesetimbangan panas [6]. Sebelumnya Alamta Singarimbun, Mitra Djamal and Septian Setyoko membahas Simulasi dari

M : massa di dalam reservoir per unit volume
t : waktu

q_m : fluks massa sumber (*inlet*) per unit volume

Q_m : fluks massa keluar reservoir (*outlet*) per unit volume

Persamaan (3.6) merupakan jenis persamaan difusi dan merupakan persamaan diferensial parsial parabolik. Persamaan ini dapat disusun lagi penulisannya dalam bentuk:

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \nabla \cdot Q_m - q_m = 0 \quad (3.7)$$

$$M = \phi \rho \quad (3.8)$$

Fluida yang dimodelkan dalam pemodelan ini merupakan fluida satu fasa air, sehingga saturasi air dapat diasumsikan sama dengan 1. Jika ϕ adalah porositas medium, maka dengan mensubstitusikan persamaan (3.6) dan (3.8) kedalam persamaan (3.7) diperoleh persamaan (3.9)[7].

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(-\frac{k}{v}(\rho g \nabla D - \nabla P) \right) - q_m = 0 \quad (3.9)$$

Oberbeck-Boussinesq mengasumsikan bahwa perubahan massa jenis dalam persamaan (3.9) tersebut dapat diabaikan kecuali untuk suku $\rho g \nabla D$ dalam hukum Darcy [1]. Oleh karena itu, jika porositas medium diasumsikan konstan maka persamaan (3.9) tereduksi menjadi persamaan (3.10).

$$\nabla \cdot \left(-\frac{k}{v}(\rho g \nabla D - \nabla P) \right) - q_m = 0 \quad (3.10)$$

Viskositas kinematis pada simulasi numerik ini menggunakan rumusan empiris dengan mengasumsikan bahwa fluida adalah cairan murni yang H_2O berupa , sehingga

$$v_w = \frac{10^{-7} \times 239.4 \times 10^{\frac{248.37}{7+133}}}{\rho_w} \quad (3.11)$$

Pada model ini efek kedalaman diabaikan sehingga $\nabla D = 0$ dan massa jenis air tetap, tidak berubah terhadap waktu $\frac{\partial}{\partial t}(\rho_w) = 0$. Sehingga untuk persamaan kesetimbangan massa fluida fasa tunggal dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k}{v_w} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k}{v_w} \frac{\partial P}{\partial z} \right) - q_m = 0 \quad (3.12)$$

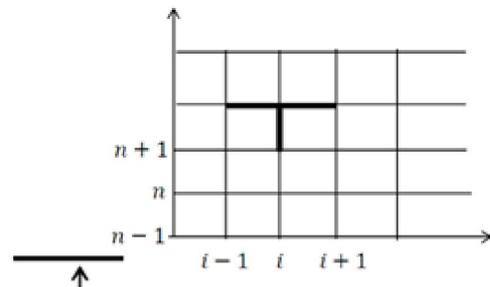
Atau dapat ditulis menjadi :

$$\frac{k}{v_w} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{k}{v_w} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - q_m = 0 \quad (3.13)$$

METODE BEDA HINGGA CENTERED DIFFERENCE

Metode beda hingga memiliki bermacam skema yaitu skema implisit, eksplisit, dan *Crank-Nicholson*. Pada paper ini akan digunakan skema eksplisit untuk menyelesaikan persamaan difusi dua dimensi yang berbentuk persamaan diferensial parsial orde dua. Penerapan metode beda hingga untuk mencari solusi dari persamaan diferensial parsial beberapa hal perlu diperhatikan, yaitu diskritisasi dari suatu persamaan, bentuk aproksimasi beda hingga, kondisi syarat akhir dan syarat batas serta kestabilan dari skema tersebut.

Pada skema eksplisit, variable $n+1$ dihitung berdasarkan variabel pada waktu ke n yang sudah diketahui. Dengan menggunakan skema seperti Gambar 1, variabel tekanan $P(x,t)$ didekati dalam bentuk berikut.



Penyelesaian diketahui sampai waktu ke- n

Gambar 1. Skema eksplisit metode beda hingga

Dengan menggunakan diskritisasi metode beda hingga *centered difference* untuk turunan pertama dan kedua terhadap x diperoleh nilai

turunan pertama $\frac{\partial P}{\partial x}$ dan $\frac{\partial P}{\partial z}$ adalah

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_{i+1,j}^n - P_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{P_{i,j+1}^n - P_{i,j-1}^n}{2\Delta z} \quad (3.15)$$

Dan nilai turunan kedua $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$ dan $\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}$ sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{P_{i,j+1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j-1}^n}{\Delta z^2} \quad (3.17)$$

Persamaan kesetimbangan massa dijabarkan dalam bentuk sebagai berikut.

$$\frac{k}{v_w} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{k}{v_w} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - q_m = 0 \quad (3.18)$$

Persamaan (3.18) merupakan persamaan dua dimensi, yang didekati dengan persamaan (3.16) dan (3.17), sehingga diperoleh :

$$\frac{k}{v_m} \frac{P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{k}{v_m} \frac{P_{i,j+1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j-1}^n}{\Delta z^2} - q_m = 0 \quad (3.19)$$

Persamaan (3.19) dapat dituliskan dalam bentuk :

$$\frac{k}{v_m} \Delta_x^2 P + \frac{k}{v_m} \Delta_z^2 P - q_m = 0 \quad (3.20)$$

dengan

$$\Delta_x^2 P = \frac{P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \quad (3.21)$$

$$\Delta_z^2 P = \frac{P_{i,j+1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j-1}^n}{\Delta z^2} \quad (3.22)$$

Reservoir pada simulasi ini diasumsikan berada pada keadaan alaminya tanpa ada perlakuan proses produksi selama simulasi baik pengambilan massa fluida dari dalam reservoir maupun proses injeksi fluida ke dalam reservoir. Belum ada aliran massa maupun energy dari dan keluar reservoir[8], berada pada fasa air dengan gradient temperature $0.07 \text{ } ^\circ\text{C}/\text{m}$.

Dinding-dinding reservoir diasumsikan bersifat impermeable terhadap massa dan energi ($Q_m = 0, Q_e = 0$). Pada simulasi numerik ini digunakan asumsi sebagai berikut :

1. Aliran fluida 'viscous flow' dan tidak kencang
2. Fluida tak termampatkan (inkompresibel)
3. Fluida adalah air murni (efek reaksi kimia diabaikan)
4. Viskositas fluida merupakan fungsi dari temperature
5. Efek tekanan kapiler diabaikan
6. Keseimbangan kalor antara fluida dan medium terjadi bersamaan
7. M (massa fluida yang tersimpan dalam reservoir) dan E (kalor yang tersimpan dalam reservoir) adalah konstan.

HASIL NUMERIK

Pada bagian ini diberikan hasil perhitungan numerik yang merupakan solusi dari persamaan difusi dua dimensi dengan metode beda hingga *centered difference* melalui skema eksplisit. Bila

diasumsikan $\Delta x = \Delta z$, sehingga persamaan (3.22) dapat dituliskan menjadi

$$\frac{k}{v_m} (P_{i+1,j}^n - 4P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n + P_{i,j+1}^n + P_{i,j-1}^n) - q_m = 0 \quad (3.23)$$

Pada kondisi awal diasumsikan $q_m = 0$, persamaan (3.23) menjadi

$$\frac{k}{v_m} (P_{i+1,j}^n - 4P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n + P_{i,j+1}^n + P_{i,j-1}^n) = 0 \quad (3.24)$$

Karena $\frac{k}{v_m} \neq 0$, maka haruslah $(P_{i+1,j}^n - 4P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n + P_{i,j+1}^n + P_{i,j-1}^n) = 0$, sehingga diperoleh

$$P_{i-1,j}^n - 4P_{i,j}^n + P_{i+1,j}^n + P_{i,j-1}^n + P_{i,j+1}^n = 0 \quad (3.25)$$

Dalam simulasi reservoir, volume suatu reservoir dipecah menjadi banyak subvolume kecil yang umumnya disebut sebagai elemen volume atau blok grid [4]. Bidang hitungan dibagi dalam bentuk grid 5x5 dengan memanfaatkan kondisi batas (*boundary conditions*) yang telah diketahui, akan ditentukan nilai P dalam *mesh point*. Dengan ketebalan formasi 1,5 km dan lebar formasi secara horizontal 1,5 km ($0 \leq x \leq 1,5; 0 \leq z \leq 1,5$), kondisi batas yang

digunakan adalah:

$$P(x, 0) = 0 ; P(x, 1,5) = 0 ;$$

$$P(0, z) = 0 ; P(1,5, z) = 0 ;$$

$$P(0,375, z) = 1 ; P(0,75, z) = 1 ;$$

$$P(1,125, z) = 1.$$

Batas tekanan pada tepi formasi sebagai berikut:

Bagian atas 0

Bagian bawah 100

Bagian tepi kanan dan kiri 50

Dan penjabaran dari perhitungan 9 mesh point adalah sebagai berikut :

Koordinat (2,2) :

$$P_{1,2}^n - 4P_{2,2}^n + P_{3,2}^n + P_{2,1}^n + P_{2,3}^n = 0$$

$$4P_{2,2}^n - P_{3,2}^n - P_{2,3}^n = P_{1,2}^n + P_{2,1}^n$$

Koordinat (3,2) :

$$P_{2,2}^n - 4P_{3,2}^n + P_{4,2}^n + P_{3,1}^n + P_{3,3}^n = 0$$

$$-P_{2,2}^n + 4P_{3,2}^n - P_{4,2}^n - P_{3,3}^n = P_{3,1}^n$$

Koordinat (4,2) :

$$P_{3,2}^n - 4P_{4,2}^n + P_{5,2}^n + P_{4,1}^n + P_{4,3}^n = 0$$

$$-P_{3,2}^n + 4P_{4,2}^n - P_{5,2}^n = P_{4,1}^n + P_{4,3}^n$$

Koordinat (2,3) :

$$P_{1,3}^n - 4P_{2,3}^n + P_{3,3}^n + P_{2,2}^n + P_{2,4}^n = 0$$

$$4P_{2,3}^n - P_{3,3}^n - P_{2,2}^n = P_{1,3}^n + P_{2,4}^n$$

Koordinat (3,3) :

$$P_{2,3}^n - 4P_{3,3}^n + P_{4,3}^n + P_{3,2}^n + P_{3,4}^n = 0$$

Koordinat (4,3) :

$$P_{3,3}^n - 4P_{4,3}^n + P_{5,3}^n + P_{4,2}^n + P_{4,2}^n = 0$$

$$-P_{3,3}^n + 4P_{4,3}^n - P_{4,2}^n - P_{4,2}^n = P_{5,3}^n$$

Koordinat (2,4) :

$$P_{1,4}^n - 4P_{2,4}^n + P_{3,4}^n + P_{2,3}^n + P_{2,5}^n = 0$$

$$4P_{2,4}^n - P_{3,4}^n - P_{2,3}^n = P_{1,4}^n + P_{2,5}^n$$

Koordinat (3,4) :

$$P_{2,4}^n - 4P_{3,4}^n + P_{4,4}^n + P_{3,3}^n + P_{3,5}^n = 0$$

$$-P_{2,4}^n + 4P_{3,4}^n - P_{4,4}^n - P_{3,5}^n = P_{3,3}^n$$

Koordinat (4,4) :

$$P_{3,4}^n - 4P_{4,4}^n + P_{5,4}^n + P_{4,3}^n + P_{4,5}^n = 0$$

$$-P_{3,4}^n + 4P_{4,4}^n - P_{4,3}^n = P_{5,4}^n + P_{4,5}^n$$

Penjabaran system persamaan diatas dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{2,2}^n \\ P_{3,2}^n \\ P_{4,2}^n \\ P_{2,3}^n \\ P_{3,3}^n \\ P_{4,3}^n \\ P_{2,4}^n \\ P_{3,4}^n \\ P_{4,4}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1,2}^n + P_{2,1}^n \\ P_{3,1}^n \\ P_{4,1}^n + P_{5,2}^n \\ P_{1,3}^n + P_{2,4}^n \\ 0 \\ P_{5,3}^n \\ P_{1,4}^n + P_{2,5}^n \\ P_{3,5}^n \\ P_{5,4}^n + P_{4,5}^n \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Ruas kanan persamaan (3.26) merupakan kondisi batas nilai yang telah diketahui. Dengan

menghitung kondisi batas, maka persamaan (3.26) ditulis menjadi:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{2,2}^n \\ P_{3,2}^n \\ P_{4,2}^n \\ P_{2,3}^n \\ P_{3,3}^n \\ P_{4,3}^n \\ P_{2,4}^n \\ P_{3,4}^n \\ P_{4,4}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 + 50 \\ 100 \\ 50 + 100 \\ 100 + 50 \\ 0 \\ 50 \\ 50 + 0 \\ 0 \\ 50 + 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{2,2}^n \\ P_{3,2}^n \\ P_{4,2}^n \\ P_{2,3}^n \\ P_{3,3}^n \\ P_{4,3}^n \\ P_{2,4}^n \\ P_{3,4}^n \\ P_{4,4}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 100 \\ 150 \\ 150 \\ 0 \\ 50 \\ 50 \\ 0 \\ 50 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Dari persamaan (3.27) solusi persamaan difusi dua dimensi untuk menyelesaikan masalah kesetimbangan massa reservoir dapat diselesaikan dengan menentukan nilai vektor kolom menggunakan metode eliminasi gauss atau iterasi gauss-seidel. Dengan perhitungan menggunakan aplikasi software MAPLE 12 diperoleh solusi numerik dari persamaan difusi yang telah didiskritisasi sebagai berikut

Titik ke- / Proses	Hasil
$P_{2,2}^n$	80,35
$P_{3,2}^n$	86,06
$P_{4,2}^n$	96,06
$P_{2,3}^n$	85,32
$P_{3,3}^n$	67,83
$P_{4,3}^n$	62,84
$P_{2,4}^n$	41,12
$P_{3,4}^n$	37,11
$P_{4,4}^n$	37,49

Dari tabel diatas terlihat bahwa distribusi tekanan pada 9 buah domain (*mest point*) yang merupakan distribusi tekanan yang hidrostatis, dengan tekanan terendah terletak pada bagian atas formasi sedangkan tekanan paling tinggi terletak pada bagian bawah formasi.

PENUTUP

Perubahan fasa pada reservoir panas bumi antara lain dapat diketahui dari parameter tekanan. Fenomena ini dapat diformulasikan dalam persamaan difusi dua dimensi yang berbentuk persamaan diferensial parsial orde dua. Penyelesaian dari persamaan tersebut didekati secara numerik menggunakan metode beda

hingga *centered difference* dengan skema eksplisit. Untuk menentukan volume tekanan dibagi menjadi *mesh point*, semakin banyak jumlah elemen titik-titik domain atau *mesh point* semakin akurat hasil penyebaran tekanan. Panas menyebar dari titik yang tekanannya lebih tinggi menuju ke titik yang tekanannya lebih rendah.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Sumardi, *Pemodelan Numerik Sistem Hidrotermal Lapangan Panasbumi Kamojang*. Bandung: Departemen Fisika FMIPA ITB, 2005.
- [2] Broto, Sudaryo, Thomas Triadi Putranto. *Aplikasi Metode Geomagnet dalam Eksplorasi Panasbumi*. TEKNIK-Vol. 32 No. 1, 2011.
- [3] Hasan, A.R. dan Kabir, C.S, Modeling Two-Phase Fluid And Heat Flows In Geothermal Wells . *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 71, pp.77-86, 2010.
- [4] Pruess, Karsen, *Mathematical modeling of fluid flow and heat transfer in geothermal systems- an introduction in five lectures*. Geothermal Training Programme United Nations University, 2002.
- [5] Setyoko, S, *Simulation of Injection and Production Process in Geothermal reservoir Using Finite Difference Method*. Thesis ITB, 2011.
- [6] Singarimbun, A, dkk. *Estimation of Parameter Distribution and Injection Process in Geothermal Reservoir*. Internatioanal Journal of Energy and Environment. Issue 6, volume 6, 2012.
- [7] Singarimbun, A., Ehara, S., Fujimitsu, Y, *A Numerical Model of Magmatic Hydrothermal System and Its Application to Kuju Volcano, Central Kyushu, Japan*,

- Memoirs of the Faculty Engineering, Kyushu University*, vol. 56, No. 4, 1996.
- [8] Singarimbun, A, Mitra Djamal, Septian Setyoko. *Numerical of Production and Injection Procsee in Geothermal Reservoir Using Finite Difference Method*. Issue3, volume 7, july 2012.
- [9] T. N. Narasimban, and K. Pruess. *A Practical Method for Modelling Fluid and Heat Flow in Fractured Porous Media*. Lawrence Berkeley Laboratory LBL-13487, University of California, 1982.
- [10] Wahyonor, Teguh P, dkk., *Analisis Data Suhu, Konduktifitas, dan Aliran Panas untuk Menafsirkan Struktur Bawah Permukaan Daerah Gedongsongo Beserta*. Pertemuan Ilmiah Tahunan ke-29, Yoryakarta 5-7 Oktober 2004.