

Penyelesaian Numerik Persamaan *Advection* Dengan *Radial Point Interpolation Method* dan Integrasi Waktu Dengan *Discontinuous Galerkin Method*

Kresno Wikan Sadono

Departemen Teknik Sipil, Fakultas Teknik, Universitas Diponegoro,
Jl. Prof. Soedarto, SH, Kampus Undip Tembalang, Semarang, Indonesia 50275

Abstrak

Persamaan differensial banyak digunakan untuk menggambarkan berbagai fenomena dalam bidang sains dan rekayasa. Berbagai masalah kompleks dalam kehidupan sehari-hari dapat dimodelkan dengan persamaan differensial dan diselesaikan dengan metode numerik. Salah satu metode numerik, yaitu metode *meshfree* atau *meshless* berkembang akhir-akhir ini, tanpa proses pembuatan elemen pada domain. Penelitian ini menggabungkan metode *meshless* yaitu *radial basis point interpolation method* (RPIM) dengan integrasi waktu *discontinuous Galerkin method* (DGM), metode ini disebut RPIM-DGM. Metode RPIM-DGM diaplikasikan pada *advection equation* pada satu dimensi. RPIM menggunakan basis function *multiquadratic function* (MQ) dan integrasi waktu diturunkan untuk *linear-DGM* maupun *quadratic-DGM*. Hasil simulasi menunjukkan, metode ini mendekati hasil analitis dengan baik. Hasil simulasi numerik dengan RPIM DGM menunjukkan semakin banyak node dan semakin kecil *time increment* menunjukkan hasil numerik semakin akurat. Hasil lain menunjukkan, integrasi numerik dengan *quadratic-DGM* untuk suatu *time increment* dan jumlah node tertentu semakin meningkatkan akurasi dibandingkan dengan *linear-DGM*.

Kata kunci: persamaan differensial; *meshfree*; *meshless*; *radial basis point interpolation method*; *discontinuous Galerkin method*; *advection equation*

Abstract

[Title: Numerical solution of *advection equation* with *radial basis interpolation method* and *discontinuous Galerkin method* for time integration] Differential equation is widely used to describe a variety of phenomena in science and engineering. A variety of complex issues in everyday life can be modeled with differential equations and solved by numerical method. One of the numerical methods, the method *meshfree* or *meshless* developing lately, without making use of the elements in the domain. The research combines methods *meshless*, i.e. *radial basis point interpolation method* with *discontinuous Galerkin method* as time integration method. This method is called RPIM-DGM. The RPIM-DGM applied to one dimension *advection equation*. The RPIM using basis function *multiquadratic function* and time integration is derived for *linear-DGM* and *quadratic-DGM*. The simulation result shows that this numerical method, close to the results exact well. The results of numerical simulations with RPIM-DGM show, the more nodes and the smaller the time increment, the more accurate the numerical results. Other results showed, integration with *quadratic-DGM* for a time increment, and a certain number of nodes, further improving accuracy, compared with the *linear-DGM*.

Keywords: differential equation; *meshfree*; *meshless*; *radial basis point interpolation method*; *discontinuous Galerkin method*; *advection equation*

1. Pendahuluan

Fenomena pada bidang sains dan rekayasa dapat dimodelkan dengan persamaan differensial atau *differential equation* (DE). Untuk beberapa kasus yang sangat sederhana tersedia solusi analitik atau eksak (*exact*) untuk DE tersebut. Namun pada masalah real dalam kehidupan sehari-hari yang sangat rumit solusi analitis tidak tersedia. Sehingga metode

numerik merupakan salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan DE yang kompleks.

Pada metode numerik tertentu, *domain* pada suatu masalah dapat dibagi menjadi *sub-domain* yang disebut *element* atau *cell*. Penyelesaian numerik dengan metode ini disebut *mesh based method*, dimana *finite element method* (FEM), *discontinuous Galerkin method* (DGM) dan *finite volume method* (FVM) termasuk didalamnya.

Akhir-akhir ini berkembang beberapa metode numerik yang tidak menggunakan *element* atau *cell*, hanya menyebar *node* pada *domain* dan *boundary*,

E-mail: kresnowikan@gmail.com

metode tersebut disebut *meshfree* atau *meshless*. Metode *meshless* memiliki keuntungan karena *mesh* dari *domain* tidak dilakukan sehingga simulasi lebih sederhana (Belytschko dkk., 1994; Liu dkk., 1995; Dolbow dan Belytschko, 1998). Metode *smoothed particle hydrodynamics* (SPH), *element free Galerkin* (EFG), *radial basis function* (RBF) dan *radial point interpolation method* (RPIM) termasuk metode *meshfree* atau *meshless* tersebut.

Metode numerik misalnya, *finite difference method* (FDM), FEM, DGM, FMV, SPH, EFG, RBF dan RPIM dapat dikombinasikan untuk penyelesaian numerik pada *domain* ruang dan waktu, misalnya RBF dengan integrasi waktu Runge-Kutta (FDM) (Sarra & Kansa, 2010) dan SPH dengan integrasi waktu (*time integration*) *leap frog* (FDM) (Monaghan, 1992). Selain itu DE dapat diselesaikan secara serentak pada *domain* ruang dan waktu sekaligus dengan satu metode, misalnya FEM untuk penyelesaian *domain* ruang dan waktu yaitu, *space time finite element method* (Baptisa, 2011).

Penelitian yang telah ada menggunakan RPIM untuk menyelesaikan berbagai masalah pada domain ruang tanpa melibatkan integrasi waktu, (Liu, 2003). Penelitian ini mengembangkan metode RPIM yang telah ada dengan menambahkan integrasi waktu dengan DGM. Penambahan integrasi waktu dengan DGM memungkinkan dilakukan simulasi DE yang melibatkan *domain* waktu maupun masalah yang berkaitan dengan waktu.

Penelitian ini bertujuan menurunkan RPIM untuk penyelesaian *domain* ruang dan integrasi waktu dengan DGM, skema tersebut dinamakan RPIM-DGM. Perilaku numerik RPIM-DGM diselidiki dengan mengaplikasikan pada *advection equation* pada satu dimensi.

2. Metode

Persamaan diferensial parsial (*partial differential equation*, PDE) tipe *advection* untuk satu dimensi pada sumbu x , dinyatakan pada Persamaan 1, untuk $x_l \leq x \leq x_r$ dan $t > 0$.

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

Dimana $u(x, t)$ adalah *unknown*, x adalah sumbu ruang, t adalah waktu, x_l adalah batas kiri (*left boundary*) dan x_r adalah batas kanan (*right boundary*). *Boundary condition* (BC) dan *initial condition* (IC) dinyatakan pada Persamaan 2 (Sara & Kansa, 2010).

$$u(x_r, t) = 0 \quad ; \quad u(x, 0) = e^{-c(x-x_0)^2} \quad (2)$$

Solusi analitik atau *exact solution* dari persamaan *advection* dinyatakan dalam Persamaan 3, (Sara & Kansa, 2010).

$$u(x, t) = e^{-c(x-x_0+t)^2} \quad (3)$$

Penggabungan skema RPIM dengan DGM dilakukan dengan menggunakan *partial discretization* (Zienkiewicz & Morgan, 1982).

Jika suatu fungsi $u(\mathbf{x})$ didefinisikan pada suatu *domain* Ω yang direpresentasikan dengan n buah *node* yang tersebar pada *support domain*. *Point interpolation method* (PIM) melakukan interpolasi $u(\mathbf{x})$ dengan menggunakan nilai pada *node* pada *support domain* dengan pusat geometri \mathbf{x}_Q (Liu, 2003).

Untuk interpolasi suatu *unknown* $u(\mathbf{x})$ pada suatu *domain* Ω dengan n buah *node* yang tersebar pada *support domain* dinyatakan dengan Persamaan 4.

$$u_n(\mathbf{x}, \mathbf{x}_Q) = \sum_{i=1}^n R_i(\mathbf{x}) a_i(\mathbf{x}_Q) = \mathbf{R}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}_Q) \quad (4)$$

Nilai u_n adalah *unknown* yang dicari, $R_i(\mathbf{x})$ adalah *radial basis function*, $a_i(\mathbf{x}_Q)$ adalah konstanta. Untuk kasus 2 dimensi nilai $\mathbf{x} = [x \ y]$. Nilai *basis function* $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ dinyatakan dalam Persamaan 5.

$$\mathbf{R}^T(\mathbf{x}) = [R_1(\mathbf{x}) \ R_2(\mathbf{x}) \ \dots \ R_n(\mathbf{x})] \quad (5)$$

Nilai dari *basis function* menggunakan tipe *multiquadratic* (MQ), (Sara & Kansa, 2010) dinyatakan pada Persamaan 6

$$R_i(x, y) = \sqrt{1 + \varepsilon^2 r_i^2} \quad (6)$$

Dengan ε adalah *shape parameter* dan r_i adalah jarak antara *node* dinyatakan pada Persamaan 7.

$$r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 - (y - y_i)^2} \quad (7)$$

Dengan membuat $u(\mathbf{x})$ memotong pada tiap *node* yang tersebar pada *support domain* dengan pusat geometri \mathbf{x}_Q maka *moment matrix* RBF dinyatakan dalam Persamaan 8.

$$\mathbf{R}_Q = \begin{bmatrix} R_1(r_1) & R_2(r_1) & \dots & R_n(r_1) \\ R_1(r_2) & R_2(r_2) & \dots & R_n(r_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1(r_n) & R_2(r_n) & \dots & R_n(r_n) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Interpolasi untuk k *node* dinyatakan pada Persamaan 9.

$$u_k = u(x_k, y_k) = \sum_{i=1}^n R_i(x_k, y_k) a_i \quad (9)$$

Persamaan 9 dapat dinyatakan dalam bentuk matrik sesuai Persamaan 10.

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{R}_Q \mathbf{a} \quad (10)$$

Dengan inversi Persamaan 10 untuk \mathbf{a} dan mensubstitusikan Persamaan 10 ke Persamaan 4 menghasilkan Persamaan 11

$$u_h(\mathbf{x}) = \mathbf{R}^T(\mathbf{x})\mathbf{R}_Q^{-1}\mathbf{U}_s = \Phi(\mathbf{x})\mathbf{U}_s = \Phi_i(\mathbf{x})u_i \quad (11)$$

dimana

$$\Phi(\mathbf{x}) = [R_1 \ R_2 \ \dots \ R_n] \mathbf{R}_Q^{-1} \quad (12)$$

Sehingga nilai *unknown* $u(\mathbf{x})$ dapat didekati dengan menggunakan Persamaan 13.

$$u_h(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x})\mathbf{U}_s \quad (13)$$

Untuk kasus satu dimensi, Persamaan 13 dapat dinyatakan pada Persamaan 14. Persamaan 14 memiliki *independent variable* berupa skalar x sedangkan Persamaan 13 *independent variable* berupa vektor \mathbf{x} .

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x)u_i = \Phi(x)\mathbf{U}_s \quad (14)$$

Dengan substitusi *unknown* pada *advection equation* Persamaan 1 dan mengalikan dengan *test function* Φ_j dan integrasi pada *background mesh* Ω_p menghasilkan Persamaan 15, untuk $\Phi_j = \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$.

$$\sum_{p=1}^L \int_{\Omega_p} \left(\Phi_j \frac{\partial u_h}{\partial t} - \Phi_j \frac{\partial u_h}{\partial x} \right) dx = 0 \quad (15)$$

Dengan substitusi Persamaan 14 pada Persamaan 15 menghasilkan Persamaan 16.

$$\sum_{p=1}^L \int_{\Omega_p} \left(\Phi_j \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^n \Phi_i u_i \right) - \Phi_j \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^n \Phi_i u_i \right) \right) dx = 0 \quad (16)$$

Persamaan 16 dapat ditulis dalam bentuk matrik pada Persamaan 17. Persamaan 17 merupakan sistem persamaan differensial biasa atau *system ordinary differential equation* (*system ODE*) yang diselesaikan dengan integrasi waktu.

$$\mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (17)$$

dimana

$$\mathbf{C} = \int_{\Omega_p} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_n \end{bmatrix} [\Phi_1 \ \Phi_2 \ \dots \ \Phi_n] dx \quad (18)$$

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega_p} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_n \end{bmatrix} \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \ \dots \ \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} \right] dx \quad (19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \left[\frac{\partial u_1}{\partial t} \ \frac{\partial u_2}{\partial t} \ \dots \ \frac{\partial u_n}{\partial t} \right]^T \quad (20)$$

$$\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]^T \quad (21)$$

3. Integrasi Waktu dengan DGM

Dengan pendekatan RPIM pada *domain* ruang pada persamaan *advection* pada Persamaan 1, terbentuk *system ODE* pada Persamaan 17. Persamaan ini selanjutnya diselesaikan dengan integrasi waktu, dengan DGM.

Skema DGM memiliki prosedur sama dengan FEM. *System ODE* yang dihasilkan pada Persamaan 17 dikalikan dengan *test function* ψ_l dan diintegrasikan pada *sub-domain* waktu. Integrasi dilakukan pada *elemen* atau *sub-domain* waktu $[t_k, t_{k+1}]$ (Li, 2005) (Hesthaven & Warburton, 2006).

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\mathbf{C} \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \mathbf{K}\mathbf{u} \right) \psi_l(t) dt = 0 \quad (22)$$

Nilai $\mathbf{u}(t)$ didekati $\hat{\mathbf{u}}(t(\xi))$ dengan *independent variable* waktu t ditransformasi pada *natural coordinate* ξ , untuk *linear element* DGM atau *linear-DGM* dinyatakan pada Persamaan 23.

$$\hat{\mathbf{u}}(t(\xi)) = \mathbf{u}_k^+ \psi_1^1(\xi) + \mathbf{u}_{k+1}^- \psi_2^1(\xi) \quad (23)$$

Untuk *linear element*, *shape function* ψ_1^1 dan ψ_2^1 dinyatakan pada Persamaan 24a dan 24b.

$$\psi_1^1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi(t)) \quad (24a)$$

$$\psi_2^1(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi(t)) \quad (24b)$$

Transformasi koordinat waktu t ke *natural coordinate* (ξ), dinyatakan pada Persamaan 25.

$$t(\xi) = \frac{1}{2}(t_n + t_{n+1}) + \frac{1}{2}\xi(t_{n+1} - t_n) \quad (25)$$

Dimana turunan Persamaan 25 dinyatakan pada Persamaan 26.

$$dt = \frac{\Delta t}{2} d\xi = \frac{(t_{k+1} - t_k)}{2} d\xi \quad (26)$$

Dengan *integration by parts* dua kali, dan mensubstitusikan Persamaan 23, 24 dan 26 ke Persamaan 22 untuk $\psi_l = \psi_1^1$ maka menghasilkan Persamaan 27.

$$\begin{aligned} & \mathbf{C}\mathbf{u}^+(t_k)\psi_1^1(t_k) - \mathbf{C}\mathbf{u}^-(t_k)\psi_1^1(t_k) \\ & + \int_{-1}^{+1} \left(\psi_1^1 \mathbf{C} \frac{d}{dt} (\mathbf{u}_k^+ \psi_1^1 + \mathbf{u}_{k+1}^- \psi_2^1) \right. \\ & \left. - \mathbf{K}(\mathbf{u}_k^+ \psi_1^1 + \mathbf{u}_{k+1}^- \psi_2^1) \psi_1^1 \right) \frac{\Delta t}{2} d\xi = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

Dengan menyelesaikan Persamaan 27 maka menghasilkan Persamaan 28.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \mathbf{C}\mathbf{u}_k^+ + \frac{1}{2} \mathbf{C}\mathbf{u}_{k+1}^+ - \frac{1}{3} \Delta t \mathbf{K}\mathbf{u}_k^+ - \frac{1}{6} \Delta t \mathbf{K}\mathbf{u}_{k+1}^- \\ & = \mathbf{C}\mathbf{u}_k^- \end{aligned} \quad (28)$$

Dengan cara yang sama dengan diatas, untuk $\psi_l = \psi_2^1$ menghasilkan Persamaan 29.

$$\begin{aligned} & \mathbf{C}\mathbf{u}^+(t_k)\psi_2^1(t_k) - \mathbf{C}\mathbf{u}^-(t_k)\psi_2^1(t_k) \\ & + \int_{-1}^{+1} \left(\psi_2^1 \mathbf{C} \frac{d}{dt} (\mathbf{u}_k^+ \psi_1^1 + \mathbf{u}_{k+1}^- \psi_2^1) \right. \\ & \left. - \mathbf{K}(\mathbf{u}_k^+ \psi_1^1 + \mathbf{u}_{k+1}^- \psi_2^1) \psi_2^1 \right) \frac{\Delta t}{2} d\xi = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

Penyelesaian Persamaan 29, menghasilkan Persamaan 30.

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \mathbf{C}\mathbf{u}_k^+ + \frac{1}{2} \mathbf{C}\mathbf{u}_{k+1}^- - \frac{1}{6} \Delta t \mathbf{K}\mathbf{u}_k^+ - \frac{1}{3} \Delta t \mathbf{K}\mathbf{u}_{k+1}^- \\ & = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

Dengan menggabungkan Persamaan 28 dan Persamaan 30, menghasilkan Persamaan 31. Persamaan 31 merupakan persamaan numerik untuk linear-DGM.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \mathbf{C} - \frac{1}{3} \Delta t \mathbf{K} & \frac{1}{2} \mathbf{C} - \frac{1}{6} \Delta t \mathbf{K} \\ -\frac{1}{2} \mathbf{C} - \frac{1}{6} \Delta t \mathbf{K} & \frac{1}{2} \mathbf{C} - \frac{1}{3} \Delta t \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k^+ \\ \mathbf{u}_{k+1}^- \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{u}_k^- \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (31)$$

Untuk integrasi waktu dengan quadratic-DGM, unknown $\hat{\mathbf{u}}(t(\xi))$ dinyatakan dengan Persamaan 32.

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{u}}(t(\xi)) \\ & = \mathbf{u}_k^+ \psi_1^2(\xi) + \mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}} \psi_2^2(\xi) \\ & + \mathbf{u}_{k+1}^- \psi_3^2(\xi) \end{aligned} \quad (32)$$

Dimana shape parameter untuk quadratic-DGM dinyatakan pada Persamaan 33a, 33b dan 33c

$$\psi_1^2(\xi) = \frac{1}{2} (\xi^2(t) - \xi(t)) \quad (33a)$$

$$\psi_2^2(\xi) = \frac{1}{2} (\xi^2(t) + \xi(t)) \quad (33b)$$

$$\psi_3^2(\xi) = -\xi^2(t) + 1 \quad (33c)$$

Dengan memasukkan Persamaan 32 dan Persamaan 33a, 33b dan 33c pada Persamaan 22, dan untuk $\psi_l = \psi_1^2$ menghasilkan 34.

$$\begin{aligned} & \mathbf{C}\mathbf{u}^+(t_k)\psi_1^2(t_k) - \mathbf{C}\mathbf{u}^-(t_k)\psi_1^2(t_k) \\ & + \int_{-1}^{+1} \left(\psi_1^2 \mathbf{C} \frac{d}{dt} (\mathbf{u}_k^+ \psi_1^2 + \mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}} \psi_2^2 + \mathbf{u}_{k+1}^- \psi_3^2) \right. \\ & \left. - \mathbf{K}(\mathbf{u}_k^+ \psi_1^2 + \mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}} \psi_2^2 + \mathbf{u}_{k+1}^- \psi_3^2) \psi_1^2 \right) \frac{\Delta t}{2} d\xi \\ & = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

Dengan menyelesaikan Persamaan 34 maka menghasilkan Persamaan 35.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \mathbf{C}\mathbf{u}_k^+ - \frac{2}{15} \Delta t \mathbf{K}\mathbf{u}_k^+ + \frac{2}{3} \mathbf{C}\mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}} - \frac{2}{15} \Delta t \mathbf{K}\mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}} \\ & - \frac{1}{6} \mathbf{C}\mathbf{u}_{k+1}^- + \frac{1}{30} \Delta t \mathbf{K}\mathbf{u}_{k+1}^- = \mathbf{C}\mathbf{u}_k^- \end{aligned} \quad (35)$$

Dengan cara yang sama, untuk $\psi_l = \psi_2^2$ menghasilkan Persamaan 36.

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{3} \mathbf{C}\mathbf{u}_k^+ - \frac{1}{15} \Delta t \mathbf{K}\mathbf{u}_k^+ - \frac{8}{15} \Delta t \mathbf{K}\mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} \mathbf{C}\mathbf{u}_{k+1}^- \\ & - \frac{1}{15} \Delta t \mathbf{K}\mathbf{u}_{k+1}^- = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

Untuk $\psi_l = \psi_3^2$ menghasilkan Persamaan 37.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \mathbf{C}\mathbf{u}_k^+ - \frac{1}{30} \Delta t \mathbf{K}\mathbf{u}_k^+ - \frac{2}{3} \mathbf{C}\mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}} - \frac{1}{15} \Delta t \mathbf{K}\mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}} \\ & + \frac{1}{2} \mathbf{C}\mathbf{u}_{k+1}^- - \frac{2}{15} \Delta t \mathbf{K}\mathbf{u}_{k+1}^- = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

Persamaan-persamaan 35, 36 dan 37 dapat dinyatakan dalam bentuk matrik pada Persamaan 38.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \mathbf{C} - \frac{2}{15} \Delta t \mathbf{K} & \frac{2}{3} \mathbf{C} - \frac{2}{15} \Delta t \mathbf{K} & -\frac{1}{6} \mathbf{C} + \frac{1}{30} \Delta t \mathbf{K} \\ -\frac{2}{3} \mathbf{C} - \frac{1}{15} \Delta t \mathbf{K} & -\frac{8}{15} \Delta t \mathbf{K} & \frac{2}{3} \mathbf{C} - \frac{1}{15} \Delta t \mathbf{K} \\ \frac{1}{6} \mathbf{C} - \frac{1}{30} \Delta t \mathbf{K} & -\frac{2}{3} \mathbf{C} - \frac{1}{15} \Delta t \mathbf{K} & \frac{1}{2} \mathbf{C} - \frac{2}{15} \Delta t \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k^+ \\ \mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}} \\ \mathbf{u}_{k+1}^- \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{u}_k^- \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (38)$$

Persamaan 38 merupakan persamaan numerik untuk quadratic-DGM.

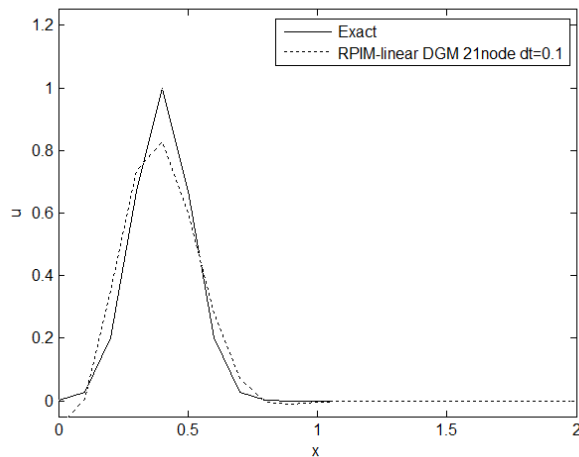
4. Pengujian Numerik

Berikut ini diaplikasikan RPIM DGM untuk advection equation. Pengujian numerik dilakukan dimana x sebagai domain ruang dengan $x_l \leq x \leq x_r$ dengan $x_l = 0.0$ dan $x_r = 2.0$. Node disebarkan merata pada domain ruang dengan jarak sama, node yang digunakan 11 buah node ($\Delta x = 0.2$), 21 node

($\Delta x = 0.1$), 201 node ($\Delta x = 0.01$) dan 401 node ($\Delta x = 0.005$).

Integrasi waktu dilakukan dengan *linear* dan *quadratic* DGM, dengan *initial time* $t = 0$ dan *final time* $t = 1$, dengan *time increment*, Δt sebesar 0.5, 0.1 dan 0.01. Nilai $d_{\max} = 2.0$ dan ϵ adalah *shape parameter* diambil 0.5. Hasil simulasi numerik RPIM-DGM dibandingkan dengan solusi *exact* pada Persamaan 3, dan *error* dibandingkan untuk beragam jumlah *node*, variasi *time increment* dan tipe integrasi waktu *linear*-DGM atau *quadratic*-DGM. *Error* dinyatakan $error = u_{\text{exact}} - u_{\text{EFG-RPIM}}$. *Error* dapat dinyatakan $\log_{10} \|error\|_2$ atau $\log_{10} \|u_{\text{exact}} - u_{\text{EFG-DGM}}\|_2$ dapat disajikan dalam grafis atau numeris.

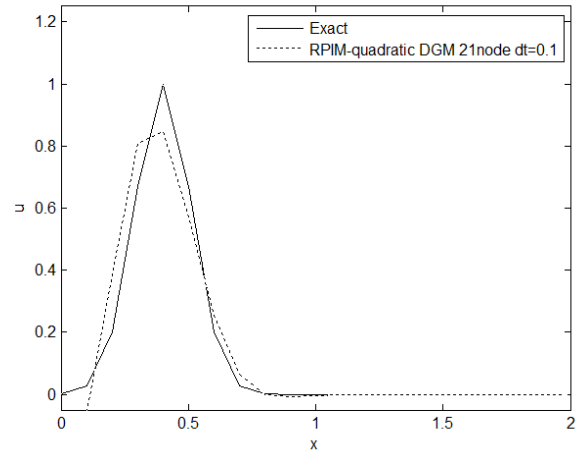
Hasil simulasi untuk 21 node ($\Delta x = 0.1$) dan $\Delta t = 0.1$ untuk RPIM-DGM terhadap hasil *exact* ditampilkan pada Gambar 1 dan 2, dengan RPIM *linear*-DGM pada Gambar 1 dan RPIM *quadratic*-DGM pada Gambar 2. Hasil simulasi menunjukkan RPIM-*linear* DGM dapat mendekati hasil *exact* dengan baik. Hasil RPIM-*quadratic* DGM ditampilkan pada Gambar 2 tidak banyak berbeda dengan RPIM-*linear* DGM. Hasil simulasi untuk 201 node ($\Delta x = 0.01$) dengan $\Delta t = 0.1$, untuk RPIM *linear*-DGM ditampilkan pada Gambar 3 sedangkan untuk RPIM *quadratic*-DGM pada Gambar 4, dimana garis putus-putus (RPIM DGM) berimpit dengan hasil *exact*.



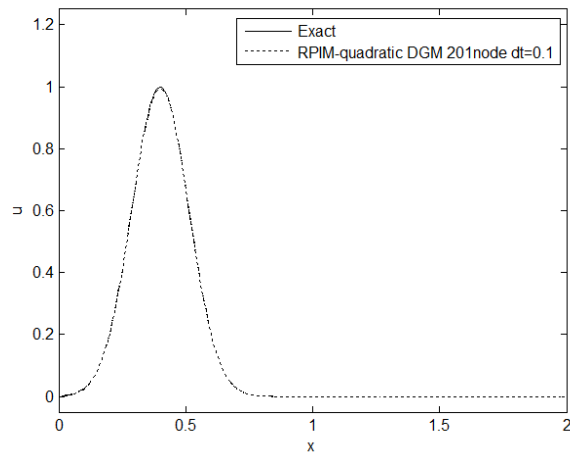
Gambar 1. Hasil RPIM DGM terhadap *exact* dengan 21 node ($\Delta x = 0.1$) dan $\Delta t = 0.1$, pada $t = 1.0$ dengan *linear*-DGM.

Simulasi *time history error* dengan berbagai variasi jumlah *node* dan *time increment* (Δt) pada RPIM *linear*-DGM ditampilkan pada Gambar 5, 6, 7 dan 8. *Time history error* meningkat sejalan waktu, kecuali untuk jumlah *node* 11 untuk $\Delta t = 0.5$. Hal ini menunjukkan bahwa solusi mengalami konvergensi atau *convergence*. Secara umum, pada Gambar 5, 6, 7 dan 8, menunjukkan semakin banyak *node* untuk simulasi (*h-refinement*) maka *error* semakin rendah dan semakin kecil *time increment* maka *error* semakin rendah, kecuali jumlah *node* 11 dan 21. Untuk jumlah

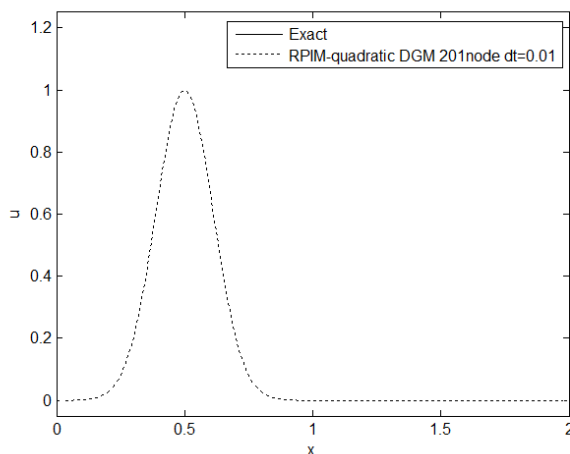
node 11 dan 21 terdapat osilasi *time history error*. Osilasi *time history error* tidak ditemui untuk jumlah *node* 201 dan 401. Nilai $\max \log_{10} \|error\|_2$ dengan RPIM *linear*-DGM ditampilkan pada Tabel 1.



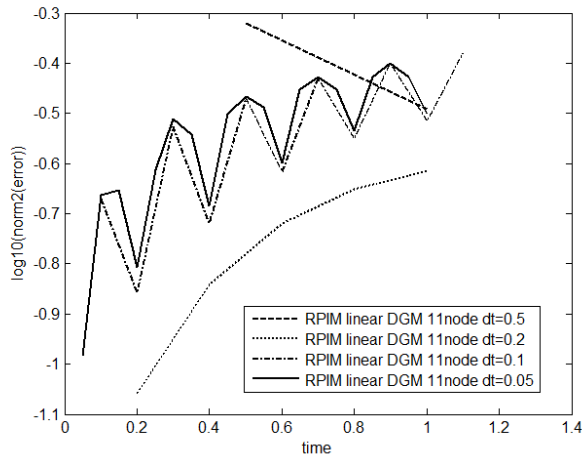
Gambar 2. Hasil RPIM DGM terhadap *exact* dengan 21 node ($\Delta x = 0.1$) dan $\Delta t = 0.1$, pada $t = 1.0$ dengan *quadratic*-DGM.



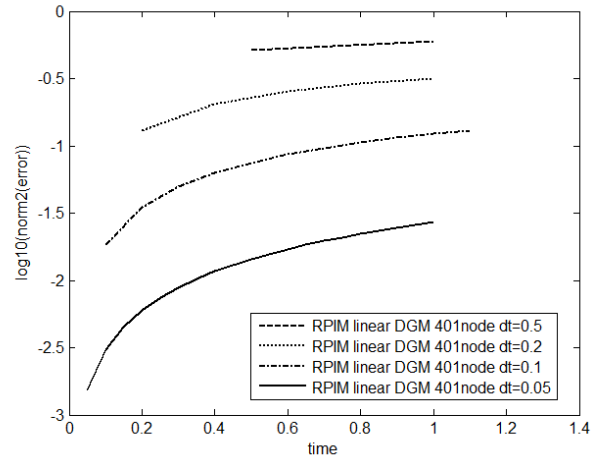
Gambar 3. Hasil RPIM *quadratic*-DGM terhadap *exact* dengan 201 node ($\Delta x = 0.1$) untuk $\Delta t = 0.1$



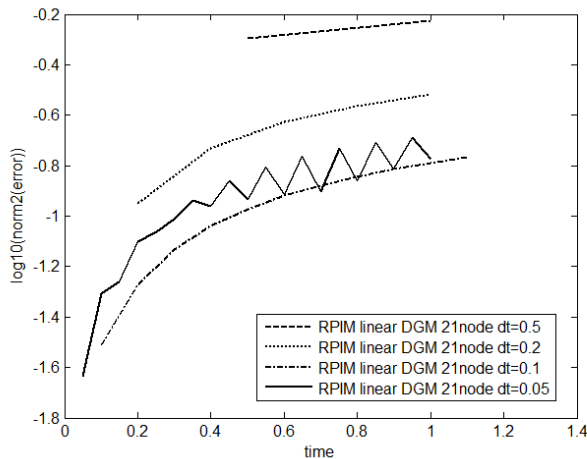
Gambar 4. Hasil RPIM *quadratic*-DGM terhadap *exact* dengan 201 node ($\Delta x = 0.1$) untuk $\Delta t = 0.01$



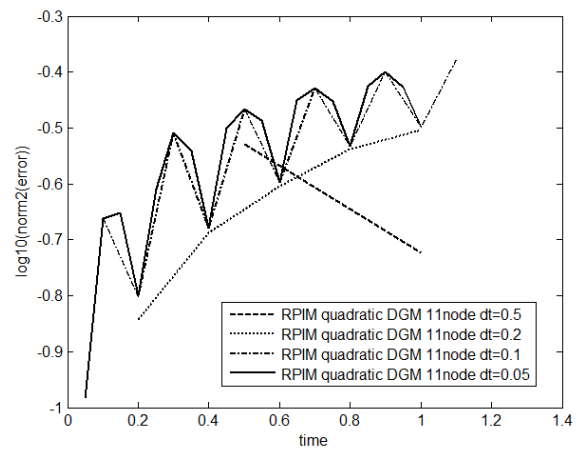
Gambar 5. Time history $\log_{10}\|\text{error}\|_2$ untuk 11 node, dengan variasi time increment (Δt), dengan RPIM linear-DGM.



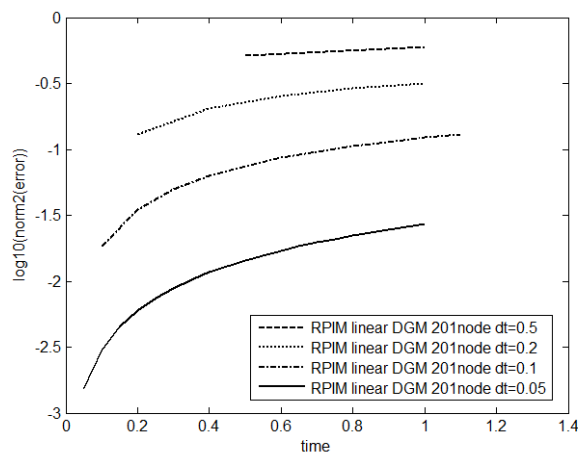
Gambar 8. Time history $\log_{10}\|\text{error}\|_2$ untuk 401 node, dengan variasi time increment (Δt), dengan RPIM linear-DGM.



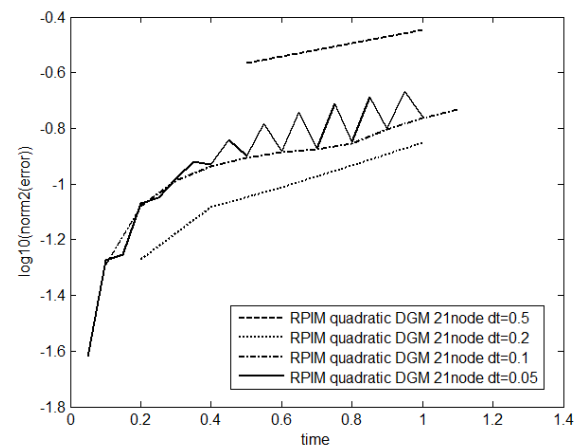
Gambar 6. Time history $\log_{10}\|\text{error}\|_2$ untuk 21 node, dengan variasi time increment (Δt), dengan RPIM linear-DGM.



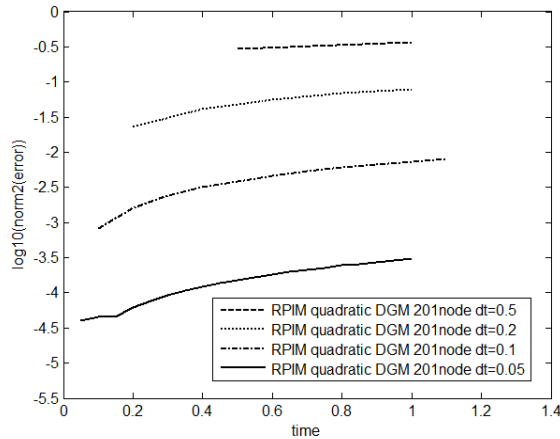
Gambar 9. Time history $\log_{10}\|\text{error}\|_2$ untuk 11 node, dengan variasi time increment (Δt), dengan RPIM quadratic-DGM



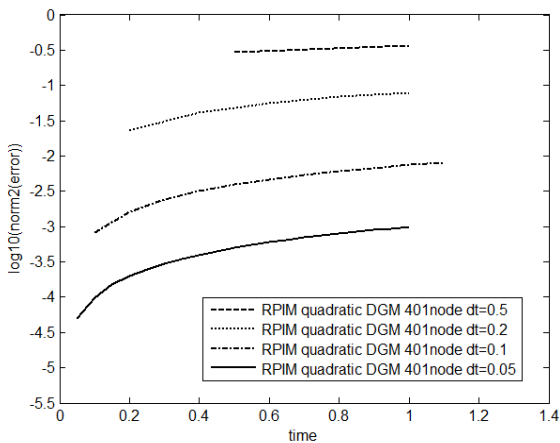
Gambar 7. Time history $\log_{10}\|\text{error}\|_2$ untuk 201 node, dengan variasi time increment (Δt), dengan RPIM linear-DGM.



Gambar 10. Time history $\log_{10}\|\text{error}\|_2$ untuk 21 node, dengan variasi time increment (Δt), dengan RPIM quadratic-DGM



Gambar 11. Time history $\log_{10}\|error\|_2$ untuk 201 node, dengan variasi time increment (Δt), dengan RPIM quadratic-DGM



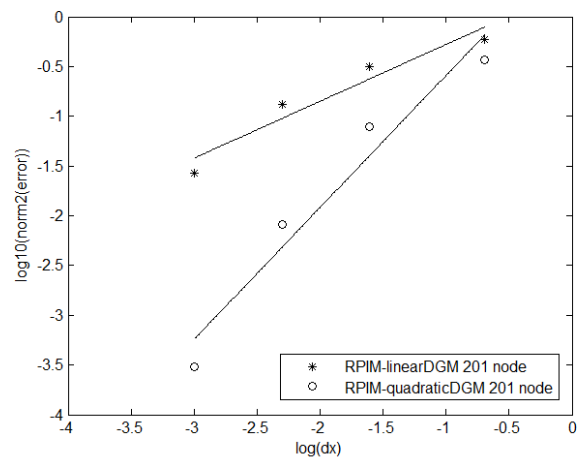
Gambar 12. Time history $\log_{10}\|error\|_2$ untuk 401 node, dengan variasi time increment (Δt), dengan RPIM quadratic-DGM

Pada RPIM quadratic-DGM, nilai time history error ditampilkan pada Gambar 9, 10, 11 dan 12 untuk beragam jumlah node dan time increment. Seiring dengan waktu, nilai error mengalami peningkatan. Untuk jumlah node semakin banyak dan semakin kecil time increment maka error yang dihasilkan semakin kecil, kecuali pada jumlah node 11 dan 21. Osilasi time history error terjadi juga pada jumlah node 11 dan 21. Nilai max $\log_{10}\|error\|_2$ untuk RPIM quadratic-DGM ditampilkan pada Tabel 1. Untuk suatu jumlah node dan time increment yang digunakan, RPIM quadratic-DGM menghasilkan nilai yang lebih akurat dibandingkan dengan RPIM linear-DGM.

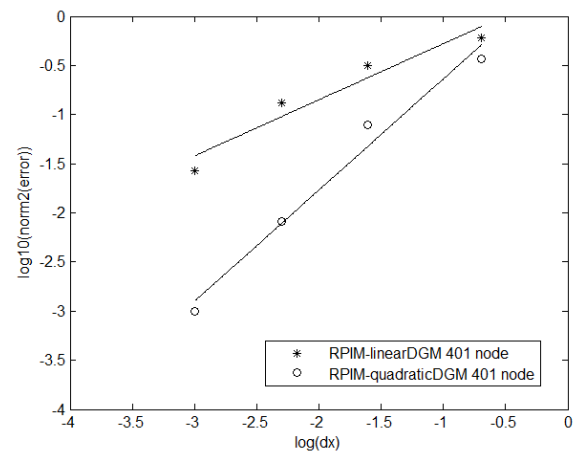
Pada Tabel 1, tampak peningkatan jumlah node dari 201 ke 401 peningkatan akurasi atau penurunan nilai error tidak signifikan. Pada RPIM quadratic-DGM dengan time increment $\Delta t = 0.05$ jumlah peningkatan node malah menurunkan akurasi. Pada Gambar 13 dan 14, nampak bahwa laju konvergensi untuk quadratic DGM lebih tinggi dibandingkan dengan linear DGM.

Tabel 1. Nilai $\max \log_{10}\|u_{exact} - u_{RPIM-DGM}\|_2$ dengan RPIM linear-DGM dan RPIM quadratic-DGM

No. nodes	Δt	Max $\log_{10}\ error\ _2$ (linear element)	Max $\log_{10}\ error\ _2$ (quadratic element)
11	0.5	-0.3213	-0.5293
11	0.2	-0.6147	-0.5028
11	0.1	-0.3793	-0.3782
11	0.05	-0.3996	-0.3995
21	0.5	-0.2255	-0.4467
21	0.2	-0.5187	-0.8524
21	0.1	-0.7662	-0.7309
21	0.05	-0.6878	-0.6670
201	0.5	-0.2239	-0.4318
201	0.2	-0.4965	-1.1008
201	0.1	-0.8844	-2.0913
201	0.05	-1.5682	-3.5165
401	0.5	-0.2237	-0.4318
401	0.2	-0.4966	-1.1014
401	0.1	-0.8841	-2.0880
401	0.05	-1.5673	-3.0027



Gambar 13. Laju konvergensi untuk RPIM-DGM untuk 201 node



Gambar 14. Laju konvergensi untuk RPIM-DGM untuk 401 node

Keunggulan dari metode ini adalah integrasi waktu yang dilakukan bersifat implisit sehingga tidak tergantung dari *time increment* Δt yang dipilih dan simulasi tetap berjalan stabil. Kelemahan metode ini adalah *degree of freedom* (dof) dari simulasi naik menjadi dua kali lipat, akibat dari integrasi waktu dengan DGM. Perhatikan Persamaan 31 dan Persamaan 38 yang memiliki *unknown* yang lebih banyak. Misalnya untuk integrasi DGM dengan *linear elemen* memiliki *unknown* \mathbf{u}_k^+ dan \mathbf{u}_{k+1}^- . Untuk integrasi waktu dengan *quadratic elemen* memiliki *unknown* \mathbf{u}_k^+ , $\mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}}$ dan \mathbf{u}_{k+1}^- . Hal ini akan mengakibatkan beban komputasi yang lebih tinggi dari integrasi waktu yang umumnya digunakan.

5. Kesimpulan

Dari hasil simulasi menunjukkan metode numerik RPIM-DGM dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan *advection*. Secara umum semakin banyak *node* yang digunakan dan semakin kecil *time increment* yang dipakai maka semakin meningkatkan akurasi RPIM-DGM. Untuk suatu jumlah *node* dan suatu *time increment*, *quadratic* DGM memiliki akurasi yang lebih baik dibandingkan dengan *linear* DGM.

Daftar Pustaka

- Baptisa, J. (2011). *Space-Time Finite Elements Methods in Elastodynamics*. Master Thesis. McGill University Canada
- Belytschko, T., Liu, Y.Y., & Gu, L. (1994). Element-Free Galerkin Method. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **37**: 229-256
- Dolbow J, Belytschko T. 1998. An introduction to programming to meshless element-free Galerkin method. *Arch. Comp. Mech. Eng.* **5**: 207-241
- Hesthaven J.S., & Warburton T. (2008). *Nodal Discontinuous Galerkin Method*. Springer
- Li, B.Q. (2006). *Discontinuous Finite Element for Fluid Dynamics and Heat Transfer*. Springer
- Liu, G.R. (2003). *Mesh free method, moving beyond the finite element method*. CRC Press
- Liu WK, Jun S, Li S, Adee J, Belytschko T. (1995). Reproducing kernel particle method for structural dynamics. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **38**: 1655-1679
- Monaghan, J.J. (1992). Smoother Particle Hydrodynamics. *Annual Review Astronomy and Astrophysics* **30**: 543-74
- Sarra, S.A., Kansa E.J. (2010). *Multiquadratic Radial Basis Function Approximation Method for Numerical Solution of Partial Differential Equations*. Tech Science Press
- Zienkiewicz, O.C., Morgan, K. (1982). *Finite Element and Approximation*. John Wiley & Sons.