

Hardi Wibowo \*)

*Abstract*

To model behavior of material, there are two basic models of the material element i.e.: *spring* and *dashpot*. In many cases, time-dependent behavior of a material can not enough be used just one or two basic model of the material element. To model time-dependent behavior of a material, combination of many basic material elements should be used. The most important of long term behaviors of concrete material is creep behavior. Many equation of creep prediction of the concrete materials have been proposed to many design specification and rule design, i.e.: American Concrete Institute (ACI), CEB/FIP 78 and 90, Bazant-Panula, Sakata, etc. This paper will be considering and demonstrating how to model creep compliance based on creep coefficient as used by ACI-209 by using assembly of those basic material element.

Keywords: time-dependent behavior, creep compliance, material model.

**Pendahuluan**

Di dalam ilmu Mekanika Statis kita mengenal regangan ( $\epsilon$ ) suatu material dimana besarnya berbanding lurus dengan tegangan ( $\alpha$ ) yang bekerja, dan berbanding terbalik dengan modulus elastisitas materialnya ( $E$ ). Pada saat itu, regangan mempunyai nilai yang tetap karena ditinjau pada waktu yang sesaat saja (waktu tertentu saja). Sebenarnya, bila tegangan bekerja pada sebuah material secara terus menerus maka nilai regangan akan berubah-ubah terhadap waktu (*time-dependent behavior*). Fenomena *time-dependent behavior* dari material yang umum kita kenal adalah *creep*. Sedangkan fenomena kebalikan dari *creep* adalah proses relaksasi (*relaxation*). *Time-dependent behavior* pada *creep* maupun *relaxation* dari sebuah material bisa dimodelkan dengan menyusun rangkaian elemen-elemen *spring* (sifat: *elastic*) dan *dashpot* (sifat: *viscous*) secara seri, paralel atau gabungan keduanya.

Tulisan ini akan membahas dan mendemonstrasikan bagaimana memodelkan persamaan *creep compliance* berdasarkan koefisien *creep* (*creep coefficient*) yang digunakan oleh ACI-209 dengan menggunakan rangkaian elemen-elemen tersebut.

**Teori Dasar**

1. Model Elemen Dasar

Ada 2 macam elemen dasar untuk pemodelan suatu material yaitu *spring* dan *dashpot*. Elemen *spring* digunakan untuk memodelkan material yang bersifat *linear-elastic*, dimana hubungan antara tegangan (*stress*)  $\sigma$  dan regangan (*strain*)  $\epsilon$  dapat ditunjukkan dengan persamaan berikut:

$$\sigma = E \cdot \epsilon \dots\dots\dots(1)$$

dimana  $E$  adalah modulus Elastisitas Young. Sedangkan elemen *dashpot* digunakan untuk memodelkan material yang mempunyai sifat *viscous*, dimana tegangan  $\sigma$  berhubungan linear dengan laju regangan (*strain rate*,  $d\epsilon/dt$ )  $\dot{\epsilon}$ , persamaannya adalah:

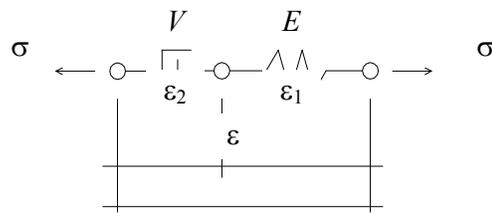
$$\sigma = V \cdot \dot{\epsilon} \dots\dots\dots(2)$$

dimana  $V$  adalah konstanta *dashpot*.

2. Model Material Dasar

Ada 2 macam model material komposit dasar, masing masing diusulkan oleh Maxwell dan Kelvin, selanjutnya material itu disebut masing-masing sebagai Maxwell Model dan Kelvin Model. Di sini disebut komposit karena material-material itu terdiri dari 2 jenis elemen.

a. Maxwell Model



Gambar 1: Maxwell Model (Fluid)

Model yang diusulkan oleh Maxwell ini disebut juga sebagai Maxwell Fluid karena berperilaku sebagai fluid. Model ini terdiri dari sebuah element *spring* dan *dashpot* yang dihubungkan secara seri (lihat gambar 1). Karena dihubungkan secara seri maka masing-masing elemen menanggung  $\sigma$  yang sama besar, dan berdasarkan persamaan 1 dan 2, maka:

Pada elemen *spring* tegangan bisa ditulis  $\sigma = E \cdot \epsilon_1$ . Bila variabel non konstantanya diturunkan terhadap waktu menjadi  $\dot{\sigma} = E \cdot \dot{\epsilon}_1$ .

Disisi lain tegangan pada elemen *dashpot* adalah  $\sigma = V \cdot \dot{\epsilon}_2$ . Sedangkan total regangan adalah  $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$  atau  $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2$ , sehingga bisa ditulis sebagai:

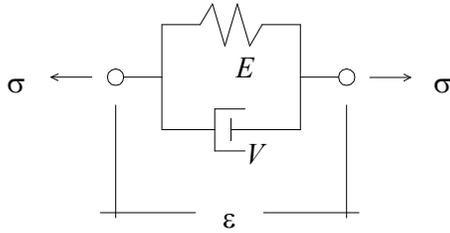
$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{V}$$

Dengan mengambil  $p_1=V/E$  dan  $q_1=V$ , persamaan ini bisa ditulis:

$$\sigma + p_1 \dot{\sigma} = q_1 \dot{\epsilon} \dots\dots\dots(3)$$

\*) Staf Pengajar Jurusan Teknik Sipil Fakultas Teknik Undip

b. Kelvin Model



Gambar 2: Kelvin Model (Solid)

Model material dasar lain diusulkan oleh Kelvin, terdiri dari sebuah elemen *spring* dan *dashpot* yang tersusun secara paralel (lihat gambar 2). Material ini mempunyai sifat sebagai material solid. Pada kondisi ini, masing-masing elemen menderita  $\varepsilon$  yang sama, tetapi  $\sigma$  harus ditanggung oleh dua element dengan porsi yang berbeda-beda tergantung konstanta  $E$  dan  $V$ , sehingga berdasarkan persamaan 1 dan 2 bisa ditulis persamaan:

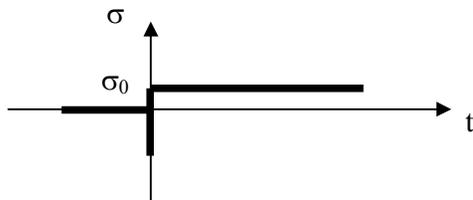
$$\sigma_1 = E\varepsilon, \text{ dan } \sigma_2 = V\dot{\varepsilon}. \text{ Sedangkan total}$$

$$\text{tegangan } \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = E\varepsilon + V\dot{\varepsilon}. \text{ Dengan}$$

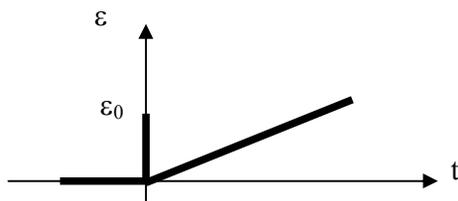
$$\text{mengambil } q_0=E \text{ dan } q_1=V, \text{ maka:}$$

$$\sigma = q_0\varepsilon + q_1\dot{\varepsilon} \dots\dots\dots (4)$$

**Creep Test dan Creep Compliance**



Gambar 3: Stress history pada Creep Test



Gambar 4: Respon Creep Test pada Material Maxwell

Uji *creep* adalah untuk mengetahui perilaku regangan terhadap waktu. Uji *creep* dilakukan dengan cara memberikan tegangan konstan pada suatu material, kemudian regangan diamati. *Stress history* pada uji *creep* dapat dilihat pada gambar 3. Secara numerik uji ini bisa dilakukan baik untuk material Maxwell, Kelvin atau model material yang lebih kompleks.

Untuk itu diperlukan penguasaan matematika terutama *integral, differential, Laplace Transforms, Step Function dan Delta Function*. Berikut ini adalah contoh uji *creep* pada material Maxwell.

Pada uji *creep*, tegangan pada  $t=0^+$  adalah konstan maka  $\sigma_{(t)} = \sigma_0$ , sehingga solusi umum dari persamaan (3) adalah:

$$\varepsilon_{(t)} = \frac{\sigma_0}{q_1} t + C_2. \text{ Dimana } C_2 \text{ adalah konstanta}$$

yang tergantung pada kondisi inisial. Dalam hal ini  $C_2 = \varepsilon_0 = \sigma_0/E$ . Sehingga bisa ditulis sebagai:

$$\varepsilon_{(t)} = \sigma_0 \frac{1}{E} (t/p_1 + 1) \dots\dots (5)$$

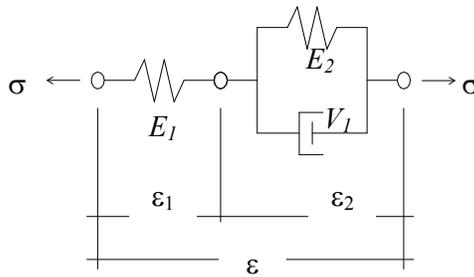
Pers. 5 menghasilkan gambar 4. Dengan mengambil  $J_{(t)} = \frac{1}{E} (t/p_1 + 1)$ , maka

$\varepsilon_{(t)} = \sigma_0 \cdot J_{(t)} \cdot J_{(0)}$  inilah yang disebut sebagai “*creep compliance*”. Uji *creep* yang dilakukan pada material Kelvin akan memberikan hasil yang sedikit berbeda dari material Maxwell.

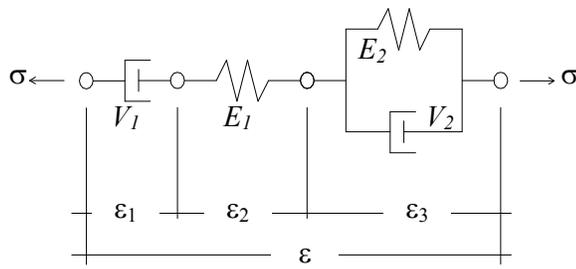
**Macam-Macam Rangkaian Lain**

Pada banyak kasus *time-dependent behavior* suatu material secara aktual adalah sangat rumit, sehingga tidak bisa dimodelkan dengan satu model material dasar saja. Untuk itu diperlukan suatu rangkaian yang merupakan kombinasi dari beberapa model material dasar. Berikut ini adalah beberapa model material rangkaian dari model material dasar. Pada prinsipnya, rangkaian yang mengandung Maxwell model akan bersifat sebagai *fluid*.

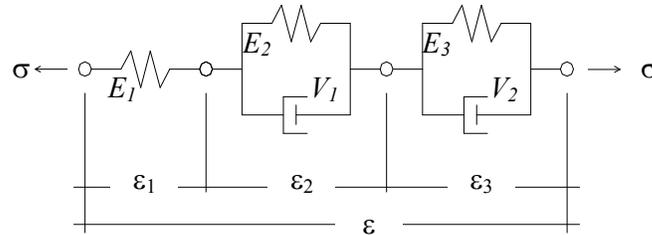
Gambar 5 disebut *3-parameter solid* atau 1-Kelvin Chain, dimana 1 material Kelvin dirangkai secara seri dengan sebuah *spring*. Gambar 6 disebut *4-parameter fluid*, dimana material Maxwell dirangkai secara seri dengan material Kelvin. Sedangkan gambar 7 adalah disebut *5-parameter solid* atau 2-Kelvin Chain, dimana 2 material Kelvin dirangkai secara seri dengan sebuah *spring*. Kita bisa membuat rangkaian sendiri sesuka hati untuk memodelkan suatu material tertentu jika rangkaian yang ada belum bisa menggambarkan perilaku suatu material dengan baik.



Gambar 5: Three-parameter solid



Gambar 6: Four-parameter fluid



Gambar 7: Five-parameter solid

**Pemodelan Creep Compliance Beton Menurut Aci-209**

Beberapa *equation of creep prediction* dari material beton telah diusulkan pada spesifikasi disain, antara lain oleh *American Concrete Institute (ACI)*, CEB/FIP78 dan 90, Bazant-Panula, Sakata dan lain-lain. ACI-209 telah diusulkan oleh *American Concrete Institute* sejak th 1992. Pada ACI-209 *creep compliance* dari material beton dirumuskan sebagai berikut:

$$J(t) = \frac{1 + \phi(t)}{E}, \text{ dimana } \phi(t) \text{ adalah creep coefficient}$$

dengan menggunakan persamaan yang diusulkan oleh Sakata  $\phi(t) = \frac{t^{0,6}}{10 + t^{0,6}} \cdot \phi_{\infty}$ . Pada ACI-209

ditentukan  $\phi_{\infty} = 2$ . Sehingga persamaan *creep compliance* beton menurut ACI-209 menjadi sebagai berikut:

$$J(t) = \frac{1 + \frac{2 \cdot t^{0,6}}{10 + t^{0,6}}}{E} \dots \dots \dots (6)$$

Dimana  $E$  adalah modulus elastisitas dari beton yang akan diselidiki, nilainya tergantung dari mutu betonnya, sedangkan  $t$  adalah variabel bebas. Sehingga persamaan 6 bisa diplot dalam sebuah grafik. Selanjutnya akan didemonstrasikan perilaku *creep compliance* beton menurut ACI-209 dengan menggunakan model-model yang terdiri dari rangkaian elemen-elemen *spring* dan *dashpot*. Dalam hal ini modulus elastisitas beton yang akan dimodelkan adalah  $E=25000 \text{ N/mm}^2$ . Dan akan dicoba 2 model seperti pada gambar 5 dan 7 yaitu 3-parameter solid (1-Kelvin Chain) dan 5-parameter solid (2-Kelvin Chain).

Kedua model tersebut masing-masing akan dicari persamaan *creep compliance*-nya untuk kemudian di-fit-kan pada grafik yang terbentuk oleh persamaan 6. Untuk mem-fit-kan akan digunakan metode *fitting* dengan menggunakan bantuan *software* komputer bernama Kaleidagrad Versi 4.0. Setelah proses pem-fit-an ini selesai dan didapat hasil yang terbaik maka parameter-parameter dari kedua persamaan *creep compliance* bisa didapatkan, sehingga besaran-besaran  $E_1, E_2$  dan  $V_1$  pada model 1-Kelvin Chain dan  $E_1, E_2, E_3$ , dan  $V_1, V_2$  pada model 2-Kelvin Chain bisa dihitung. Selanjutnya akan dibahas tentang 2 model tersebut.

1. Persamaan *Creep Compliance* model 1-Kelvin Chain

Perhatikan gambar 5, maka akan didapat:

$$\sigma = E_1 \varepsilon_1, \sigma = E_2 \varepsilon_2 + V_1 \dot{\varepsilon}_2, \text{ dan}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Ruas kanan dan kiri persamaan terakhir di transformasikan menggunakan transformasi Laplace, jadi:

$$L\{\varepsilon\} = L\{\varepsilon_1\} + L\{\varepsilon_2\} = \frac{L\{\sigma\}}{E_1} + \frac{L\{\sigma\}}{E_2 + V_1 \cdot s} =$$

$$\left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2 + V_1 \cdot s} \right) \cdot L\{\sigma\}$$

Karena pada uji creep terjadi lonjakan dirac function maka  $\sigma=H(t)$  sehingga  $L\{\sigma\} = 1/s$ , jadi:

$$L\{\varepsilon\} = \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2 + V_1 \cdot s} \right) \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{E_1 \cdot s} + \frac{1}{(E_2 + V_1 \cdot s) \cdot s}$$

$$\varepsilon(t) = L^{-1}\{\varepsilon\} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \left( 1 - \text{Exp} \left( - \frac{E_2}{V_1} \cdot t \right) \right)$$

Dengan mengambil  $C_1 = 1/E_1$ ,  $C_2 = 1/E_2$  dan  $C_3 = -(E_2/V_1)$ , maka:

$$\varepsilon(t) = C_1 + C_2(1 - \text{Exp}(C_3 t)) \dots\dots\dots (7)$$

Persamaan 7 di atas adalah persamaan uji creep. Sedangkan persamaan *creep compliance*  $J(t)$  adalah sama dengan persamaan 7 dengan menghilangkan konstanta  $C_1$ . Sehingga:

$$J(t) = C_2(1 - \text{Exp}(C_3 t)) \dots\dots\dots (8)$$

2. Persamaan *Creep Compliance* model 2-Kelvin Chain

Perhatikan gambar 7, maka akan didapat:

$$\sigma = E_1 \varepsilon_1 \quad , \quad \sigma = E_2 \varepsilon_2 + V_1 \dot{\varepsilon}_2 \quad ,$$

$$\sigma = E_3 \varepsilon_3 + V_2 \dot{\varepsilon}_3 \quad \text{dan} \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad .$$

Ruas kanan dan kiri persamaan terakhir di transformasikan menggunakan transformasi Laplace, menjadi:

$$L\{\varepsilon\} = L\{\varepsilon_1\} + L\{\varepsilon_2\} + L\{\varepsilon_3\} = \frac{L\{\sigma\}}{E_1} +$$

$$\frac{L\{\sigma\}}{E_2 + V_1 \cdot s} + \frac{L\{\sigma\}}{E_3 + V_2 \cdot s} =$$

$$\left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2 + V_1 \cdot s} + \frac{1}{E_3 + V_2 \cdot s} \right) \cdot L\{\sigma\}$$

Karena pada uji creep terjadi lonjakan dirac function maka  $\sigma = H(t)$  sehingga  $L\{\sigma\} = 1/s$ , jadi:

$$L\{\varepsilon\} = \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2 + V_1 \cdot s} + \frac{1}{E_3 + V_2 \cdot s} \right) \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{E_1 s} + \frac{1}{(E_2 + V_1 \cdot s)s} + \frac{1}{(E_3 + V_2 \cdot s)s}$$

$$\varepsilon(t) = L^{-1}\{\varepsilon\} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \left( 1 - \text{Exp}\left(-\frac{E_2}{V_1} t\right) \right) + \frac{1}{E_3} \left( 1 - \text{Exp}\left(-\frac{E_3}{V_2} t\right) \right)$$

Dengan mengambil  $C_1 = 1/E_1$ ,  $C_2 = 1/E_2$ ,  $C_3 = -(E_2/V_1)$ ,  $C_4 = 1/E_3$  dan  $C_5 = -(E_3/V_2)$  maka:

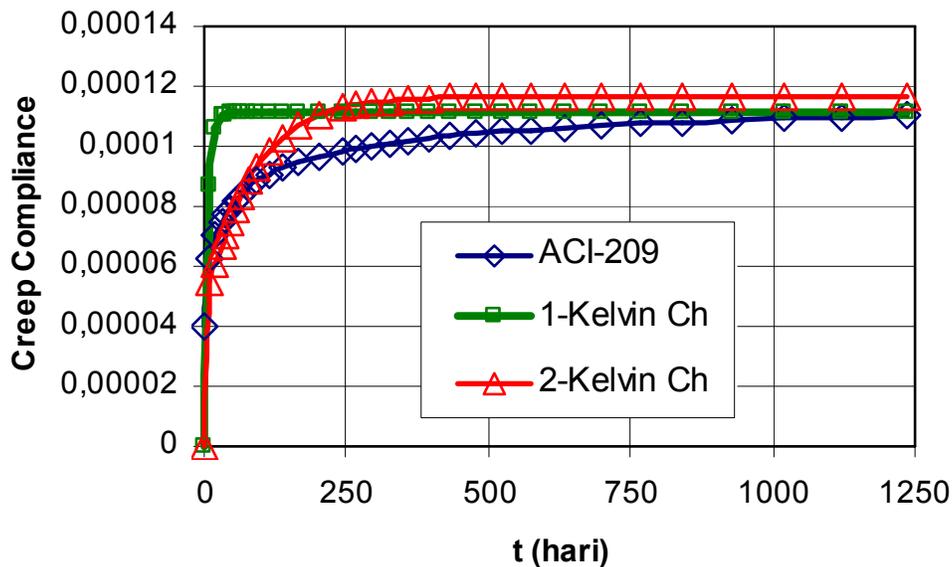
$$\varepsilon(t) = C_1 + C_2 \left( 1 - \text{Exp}(C_3 t) \right) + C_4 \left( 1 - \text{Exp}(C_5 t) \right) \quad (9)$$

Persamaan 9 di atas adalah persamaan uji creep. Sedangkan persamaan *creep compliance*  $J(t)$  adalah sama dengan persamaan 9 dengan menghilangkan konstanta  $C_1$ . Sehingga:

$$J(t) = C_2 \left( 1 - \text{Exp}(C_3 t) \right) + C_4 \left( 1 - \text{Exp}(C_5 t) \right) \quad (10)$$

3. Grafik *Creep Compliance* dan Hasil *Fitting*  
 Persamaan 8 dan 10 di-fit-kan persamaan 6, hasilnya adalah seperti pada gambar 8 berikut ini.

### CREEP COMPLIANCE



Gambar 8: *Creep compliance* ACI-209 dan, 1 dan 2 Kelvin Chain  
 Sedangkan comment dan output dari proses di Kaleidagraf adalah sebagai berikut:

Tabel 1: Comment dan Output Kaleidagraf untuk 1 dan 2 Kelvin Chain Model Yang di-fit-kan pada ACI-209

1-Kelvin Chain Model $y=m1*(1-\exp(m2*M0))$		
	Value	Error
m1	0,00011125	3,0409E-06
m2	-0,15387	0,032687
Chisq	5,7138E-08	NA
R	0,71042	NA

2-Kelvin Chain Model $y=m1*(1-\exp(m2*M0))+m3*(1-\exp(m4*M0))$		
	Value	Error
m1	6,9955E-05	1,6345E-06
m2	-0,011578	0,001202
m3	4,6806E-05	1,3784E-06
m4	-166,5	0,072429
Chisq	3,9728E-09	NA
R	0,97883	NA

Berdasarkan tabel 1 di atas, maka pada model 1-Kelvin Chain konstanta  $C_2=m1$ ,  $C_3=m2$  sehingga harga  $E_2$ , dan  $V_1$  bisa diketahui. Sedangkan harga  $E_1$  dihitung dengan menggunakan kondisi inisial dari persamaan 7. Demikian juga cara untuk menghitung harga dari parameter-parameter pada model 2-Kelvin Chain.

### Pembahasan

Proses creep akan terus berlangsung dalam waktu yang lama. Pada awalnya laju creep sangat besar dan laju itu akan semakin kecil seiring bertambahnya waktu, sampai mencapai suatu angka yang relative tetap. Untuk material beton angka yang relative tetap itu bisa dicapai dalam usia puluhan tahun. Pada studi ini (gambar 8) meskipun waktu yang ditinjau hanya 1200 hari atau sekitar 3,3 tahun namun telah bisa menunjukkan pola pola perubahan laju proses creep yang diinginkan.

Membandingkan output dari *fitting* antara model 1-Kelvin Chain dan 2-Kelvin Chain ke model ACI-209 melalui gambar 8, didapatkan bahwa pada usia 0-250 hari model 2-Kelvin Chain memiliki track yang lebih dekat dengan ACI-209, sedangkan pada usia 250-1250 hari model 1-Kelvin Chain memiliki track yang lebih dekat dengan ACI-209. Namun demikian secara keseluruhan model 2-Kelvin Chain memiliki trend yang lebih baik. Hal ini bisa dilihat dari nilai R kedua model tersebut. R model 2-Kelvin Chain adalah 0,97883 lebih besar dibandingkan dengan R model 1-Kelvin Chain sebesar 0,71042, lihat Tabel 1. Dari trend yang ada, bila model yang kita tinjau adalah n-Kelvin Chain dimana n lebih besar dari 2, maka n yang terbesar akan memberikan hasil yang lebih baik. Mengenai proses dan hasil penurunan persamaan *creep compliance*-nya, hal tersebut telah bisa dilakukan dengan baik dengan menggunakan transformasi Laplace. Proses dan hasil itu terlihat ada kemiripan antara 1-Kelvin Chain dengan 2-Kelvin Chain. Ruas kanan persamaan *creep compliance* yang dihasilkan pada 1-Kelvin Chain terdiri dari 1 suku, sedangkan pada 2-Kelvin Chain ada 2 suku, sehingga untuk n-Kelvin Chain akan didapatkan n suku. Dari itu maka untuk memudahkan proses penurunan persamaan *creep compliance* model n-Kelvin Chain perlu diturunkan rumus umumnya.

### Kesimpulan Dan Saran

Dengan demikian, telah ditunjukkan bahwa perilaku *creep compliance* material beton dengan menggunakan persamaan yang digunakan oleh ACI-209 bisa dimodelkan dengan menggunakan rangkaian *spring* dan *dashpot*. Adapun ketelitiannya masih tergantung dari bentuk rangkaian yang digunakan untuk memodelkan. Dalam hal ini perlu diteliti model lain yang lebih bisa mewakili.

Setiap jenis properties material yang berbeda (misalnya beton, baja, aluminium, tanah, batuan, polimer, dan sebagainya), meskipun jenisnya sama (misalnya beton mutu rendah degnan mutu tinggi) akibat tegangan yang bekerja dalam waktu yang lama akan mempunyai *long-term behavior* yang berbeda pula. Sehingga hal ini penting sekali untuk diperhitungkan pada struktur-struktur beton prategang, balok *hybrid*, dan struktur yang bisa mengalami *differential elongation* akibat perbedaan *long-term behavior*-nya.

### Daftar Pustaka

1. Hardi Wibowo, Teori Elastisitas dan Plastisitas, Lecturer Note, Program Master Teknik Sipil, Universitas Diponegoro Semarang, 2007.
2. J.Lemaitre and JL Caboche, Mechanic of Solid Material, Cambridge University Press, 1990.
3. MH Aliabadi, DJ Cartwright, H Nisitani (Editors), Fatigue and Fracture Mechanic, Elsevier Applied Science, 1992, (Proceeding of International Conference).
4. W.Flugge, Viscoelasticity, 2<sup>nd</sup> Edition, Springer Verlag, 1985.

